Письменный экзамен за IV–V модули

Задачи можно решать в любом порядке. Полное правильное решение каждой из задач оценивается в 10 баллов. В решениях можно без доказательств ссылаться на доказанные в лекциях теоремы и на сданные Вами задачи из листков (ссылки должны быть точными).

Задача 1. Найдите сигнатуру квадратичной формы $\operatorname{tr}(A^2)$ на пространстве квадратных матриц A размера $n \times n$. Если общий случай вызывает у Вас затруднения, решите эту задачу для[1] $n = 4$.

Задача 2. Решите в теле кватернионов $\mathbb{H}$ уравнение

$$3\boldsymbol{i} - 22 + x \cdot (1 - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) = 13 - 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$$

Задача 3. Из скольких точек состоит квадратичная поверхность, заданная однородным уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

в проективном пространстве $\mathbb{P}_3$ над полем $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[x]/(x^2+1)$, которое состоит из 9 элементов $a + ib$ с $a, b \in \mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ и символом i, удовлетворяющем условию $i^2 \equiv -1 \pmod 3$.

Задача 4. Разложите в прямую сумму циклических групп фактор группу A/B, где A — свободная абелева группа с базисом x_1, x_2, x_3, а $B \subset A$ — подгруппа, порожденная элементами

$$y_1 = 2x_1 + 6x_2 - 2x_3\,,\ y_2 = 2x_1 + 8x_2 - 4x_3\,,\ y_3 = 4x_1 + 12x_2 - 2x_3\,.$$

Задача 5. Найдите жорданову форму матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Задача 6. Найдите минимальный многочлен матрицы $\begin{pmatrix} 4 & -5 & -6 \\ -2 & 7 & 6 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

* * *

дополнительная задача
(решение почётно, но на отметку не повлияет)

Задача 7. Найдите все кватернионы с квадратом -1, коммутирующие с кватернионом x из второй задачи.

[1] в этом случае максимальная оценка за эту задачу будет снижена до 8 баллов