АЛГЕБРА – модуль 3: Экзамен

Текст решения каждой задачи должен иметь ясные начало и конец.
Решение должно содержать ответ и обоснование ответа.
Не записанные мысли не учитываются.

1. Пусть $\sigma \in S_N$ перестановка. Известно, что в разлолжении σ на независимые циклы входят только циклы длины 9 и 11.
Какие из перестановок:
$\pi_1 = \sigma^{43258}$, $\pi_2 = \sigma^{56182}$, $\pi_3 = \sigma^{25745}$, $\pi_3 = \sigma^{57452}$ взаимно-обратны?
Произведение каких из них содержит только циклы длины 11?

Далее V всегда *конечномерное* векторное пространство.

2. Известно, что V есть прямая сумма подпространств V_1 и V_2, $V = V_1 \dot{+} V_2$, и W подпространство в V. Верно ли что:
.. сумма $(W \cap V_1) + (W \cap V_2)$ прямая?
.. $\dim W = \dim(W \cap V_1) + \dim(W \cap V_2)$?
.. $\dim(W + V_1) = \dim V_1 + \dim((W + V_1) \cap V_2)$?

3. В евклидовом пространстве V размерности 10 даны вектора $v_1, \ldots, v_5$, длины которых равны 2 и угол между любыми двумя равен $\frac{\pi}{3}$.
Найти объем параллелотопа $T = \{v = t_1 v_1 + \ldots + t_5 v_5 \mid 0 \le t_i \le 1\}$.

4. Матрица самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе равна

$$\begin{bmatrix} 2 & i & 0 & 0 \\ -i & 7 & 3i & 2 \\ 0 & -3i & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Найти ортогональный базис из собственных векторов $\mathcal{A}$.

5. Линейный оператор M в эрмитовом пространстве V назвается косоэрмитовым если для любых $x, y \in V$ выполнено равенство $(x|\, My) + (Mx|\, y) = 0$.
Верно ли, что собственные значения косоэрмитова оператора вещественны?
Верно ли, что собственные векторы косоэрмитова оператора с различными собственными значениями ортогональны?

6. Линейный оператор $A : V \to V$ таков, что $\dim(\operatorname{Im} A) = \dim(\operatorname{Im} A^2)$.
Верно ли, что сумма $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A$ прямая ?