А. Л. Городенцев[1]

Формальные степенные ряды, рекуррентные уравнения и суммирование степеней

Это записки занятий, которые я проводил в 57-й и 179-й московских школах и на летней школе в Дубне, а также лекции, прочитанной мною на малом мех-мате 25 апреля 2009 года. От участников не предполагалось никаких специальных познаний кроме умения (и известного желания) раскрывать скобки. Целью занятий было знакомство с исчислением формальных степенных рядов, разложением элементарных функций (включая бином с рациональным показателем) и обращением разностных операторов на пространстве многочленов. Встречающиеся в тексте упражнения призваны заменить происходившие в реальности диалоги преподавателя с аудиторией. Все они существенны для понимания и используется в дальнейшем.

Содержание

Москва. Май 2009.

[1]Факультет математики ГУ – ВШЭ; Группа математической физики ИТЭФ; Независимый Московский университет; mailto: gorod@itep.ru ; http://wwwth.itep.ru/~gorod

§1. Алгебраические операции над рядами и многочленами.

1.1. Степенные ряды и многочлены. Мы будем заниматься бесконечными выражениями

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \tag{1-1}$$

где x — переменная, а a_i — числа из некоторого *числового поля* $\mathbb{F}$. В качестве $\mathbb{F}$ можно взять, например, поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, или поле действительных чисел $\mathbb{R}$, или поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ (если вы с ним знакомы). Всё, что нам потребуется от чисел — это возможность производить с ними четыре арифметических действия: сложение, вычитание, умножение и деление (на ненулевые числа), которые обладают теми же свойствами, что и действия над рациональными числами. Выражение (1-1) называется *формальным степенным рядом*. По определению, два ряда *равны*, если равны все их соответственные коэффициенты. Множество всех формальных степенных рядов с коэффициентами из числового поля $\mathbb{F}$ обозначается $\mathbb{F}[[x]]$. Ряд, в котором только конечное число коэффициентов a_i отлично от нуля, называется *многочленом*. Множество всех многочленов обозначается через $\mathbb{F}[x] \subset \mathbb{F}[[x]]$. Номер последнего ненулевого коэффициента многочлена $f \in \mathbb{F}[x]$ называется *степенью* этого многочлена и обозначается $\deg(f)$.

1.2. Алгебраические операции над рядами. Операция, сопоставляющая рядам $f_1, f_2, \ldots, f_n$ новый ряд g, называется *алгебраической*, если каждый коэффициент ряда g вычисляется конечным числом арифметических действий над конечным числом коэффициентов рядов $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Например, сложение и умножение рядов, происходящие по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, это алгебраические операции. В самом деле, если

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots , \end{aligned} \tag{1-2}$$

то ряды $f(x) + g(x) = s_0 + s_1x + s_2x^2 + \cdots$ и $f(x) \cdot g(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots$ имеют при x^m коэффициенты

$$s_m = a_m + b_m \quad \text{и} \quad p_m = a_0b_m + a_1b_{m-1} + \ \cdots \ + a_{m-1}b_1 + a_mb_0 = \sum_{i=0}^{m} a_ib_{m-i} , \tag{1-3}$$

которые находятся конечным числом сложений и умножений конечного набора коэффициентов рядов f и g.

Напротив, подстановка вместо x ненулевого численного значения $x = \alpha \in \mathbb{F}$ алгебраической операцией не является, поскольку «вычисление значения» $f(\alpha)$ при $\alpha \neq 0$ для ряда f с бесконечным множеством ненулевых коэффициентов может потребовать бесконечно много сложений ненулевых чисел. Только значение $x = 0$ заведомо можно подставить в любой ряд, и результатом такой подстановки будет свободный член этого ряда.

А вот подстановка в ряд $f(x)$ вместо x другого ряда $g(x) = b_1x + b_2x^2 + \ \cdots$ *без свободного члена* является алгебраической операцией, поскольку в результате такой подстановки получится ряд

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \sum_{k\geqslant 0} a_k(b_1x + b_2x^2 + \ \cdots)^k = \\ &= a_0 + a_1(b_1x + b_2x^2 + \ \cdots) + a_2(b_1x + b_2x^2 + \ \cdots)^2 + a_3(b_1x + b_2x^2 + \ \cdots)^3 + \ \cdots = \\ &= a_0 + (a_1b_1) \cdot x + (a_1b_2 + a_2b_1^2) \cdot x^2 + (a_1b_3 + 2\,a_2b_1b_2 + a_3b_1^3) \cdot x^3 + \ \cdots \ , \end{aligned}$$

в котором на коэффициент при x^m оказывают влияние только первые m слагаемых (все последующие делятся на x^{m+1}), причём в каждом из них вклад в коэффициент при x^m вносит лишь конечное число начальных членов.

1.3. Деление рядов. Ряд $f(x)$ называется *обратимым*, если существует ряд $g(x)$, такой что $f(x)\cdot g(x)=1$. В этом случае ряд $g(x)$ называется *обратным* к ряду $f(x)$ и обозначается $1/f(x)$ или $f^{-1}(x)$. Если ряд $f(x)$ обратим, то на него можно *делить*: частным $h(x)/f(x)$ называется ряд $h(x)\cdot f^{-1}(x)$.

Упражнение 1.1. Убедитесь, что $(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)=1$, откуда

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ \cdots\ =\sum_{k\geqslant 0}x^k\ . \tag{1-4}$$

Формула (1-4) называется формулой суммирования *бесконечной геометрической прогрессии*. Подчеркнём, что она констатирует некоторое *равенство между рядами*, отнюдь не предполагая возможности подставлять в него вместо x конкретные ненулевые числа — такая подстановка не является алгебраической операцией и требует отдельного определения. Однако в это равенство можно подставлять вместо x любые ряды без свободного члена. Например, подставляя вместо x одночлен αx^m, мы получим из (1-4) разложение

$$\frac{1}{1-\alpha x^m}=1+\alpha x^m+\alpha^2x^{2m}+\alpha^3x^{3m}+\ \cdots\ =\sum_{k\geqslant 0}\alpha^k x^{km}\ , \tag{1-5}$$

Упражнение 1.2. Явно выпишите все коэффициенты рядов а) $1/(1+x)$ б) $1/(1\pm x^m)$ в) $1/(1+x+x^2)$

1.3.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Ряд $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ обратим тогда и только тогда, когда $a_0\neq 0$. Обратный ряд $f^{-1}(x)$ в этом случае однозначно определяется по f, и обращение ряда*

$$f\mapsto f^{-1}$$

является алгебраической операцией.

Доказательство. Если существует ряд $f^{-1}(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\in\mathbb{F}[[x]]$, такой что $f(x)\cdot f^{-1}(x)=1$, то $a_0b_0=1$, откуда $a_0\neq 0$. Наоборот, допустим, что $a_0\neq 0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой части равенства $f(x)\cdot f^{-1}(x)=1$, мы получаем на коэффициенты b_i бесконечную систему уравнений

$$\begin{aligned} a_0b_0&=1\\ a_0b_1+a_1b_0&=0\\ a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0&=0\\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\\ a_0b_\nu+a_1b_{\nu-1}+\cdots+a_\nu b_0&=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\ , \end{aligned} \tag{1-6}$$

из которой они все однозначно определяются по рекуррентным формулам $b_0=1/a_0$ и далее, для всех $k\geqslant 1$, $b_k=-(a_1b_{k-1}+a_2b_{k-2}+\cdots+a_kb_0)/a_0$. □

§2. Обращение многочленов и решение рекуррентных уравнений.

2.1. Числа Фиббоначчи u_n определяются условиями $u_0=0$, $u_1=1$ и $u_k=u_{k-1}+u_{k-2}$ при $k\geqslant 2$, т. е. каждое число Фиббоначчи, начиная со второго, равно сумме двух предыдущих.

Как явно выразить u_k через k? Для ответа на этот вопрос рассмотрим степенной ряд

$$u(x)=\sum_{k\geqslant 0}u_kx^k=u_0+u_1x+u_2x^2+\ \cdots\ ,$$

коэффициентами которого являются числа Фиббоначчи. Выполнение для всех $k \geqslant 2$ соотношения $u_k - u_{k-1} - u_{k-2} = 0$ равносильно тому, что у произведения рядов

$$(1 - x - x^2) \cdot (u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + u_4 x^4 + \cdots) \tag{2-1}$$

обращаются в нуль коэффициенты при всех степенях x^k с $k \geqslant 2$. А поскольку $u_0 = 0$ и $u_1 = 1$, это произведение равно x. Таким образом,

$$u(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + u_4 x^4 + \cdots = \frac{x}{1 - x - x^2}\,, \tag{2-2}$$

и отыскание явной формулы для k-того числа Фиббоначчи равносильно развертыванию правой части этой формулы в степенной ряд. Для этого разложим её знаменатель на множители.

Упражнение 2.1. Пусть квадратный трёхчлен $t^2 + pt + q$ имеет корни a и b, так что $t^2 + pt + q = (t-a)(t-b)$. Убедитесь, что тогда $1 + px + qx^2 = (1 - ax)(1 - bx)$.

Корнями трёхчлена $t^2 - t - 1$ являются числа $a = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$ и $b = \left(1 - \sqrt{5}\right)/2$, и по упр. 2.1

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{x}{(1 - ax)(1 - bx)}\,.$$

Эту дробь можно разложить в сумму двух дробей с линейными знаменателями:

$$\frac{x}{(1 - ax)(1 - bx)} = \frac{\alpha}{1 - ax} + \frac{\beta}{1 - bx}\,, \tag{2-3}$$

где α и β — некоторые константы, которые мы сейчас найдём. В самом деле, равенство (2-3) равносильно равенству

$$x = \alpha(1 - bx) + \beta(1 - ax)$$

между двумя линейными многочленами, и для того, чтобы оно выполнялось тождественно по x, достаточно добиться его выполнения для каких-нибудь двух численных значений x.

Подставляя $x = 1/a$, получаем $\alpha = 1/(a - b)$, а подставляя $x = 1/b$, получаем $\beta = -1/(a - b)$. Таким образом, правая часть (2-2) является разностью двух геометрических прогрессий:

$$\frac{x}{(1 - ax)(1 - bx)} = \frac{1}{(a - b)} \cdot \left(\frac{1}{1 - ax} - \frac{1}{1 - bx}\right) = \frac{1}{(a - b)} \cdot \sum_{k \geqslant 0} (a^k - b^k) \cdot x^k\,,$$

и искомая формула для k-того числа Фиббоначчи имеет вид

$$u_k = \frac{a^k - b^k}{a - b}\,, \quad \text{где} \quad a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\,,\ b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\,. \tag{2-4}$$

2.2. Рекуррентное уравнение n-того порядка на последовательность a_i — это соотношение вида

$$a_k = \alpha_1 a_{k-1} + \alpha_2 a_{k-2} + \cdots + \alpha_n a_{k-n}\,, \tag{2-5}$$

в котором $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — заданные фиксированные числа (предполагается, что $\alpha_n \neq 0$) и которое выполняется для всех $k \geqslant n$. Соотношение (2-5) выражает k-тый член последовательности через предыдущие n членов и однозначно задаёт всю последовательность a_k, коль скоро известны её первые n членов $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Решить уравнение (2-5) с начальными условиями $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ означает написать формулу, явно выражающую a_k через k сразу для всех k.

Так, формула (2-4) для чисел Фиббоначчи решает рекуррентное уравнение второго порядка $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$ с начальными условиями $u_0 = 0$, $u_1 = 1$. Способ, которым мы получили эту формулу, может быть применён для решения любого рекуррентного уравнения (2-5) с произвольными начальными условиями. А именно, переписывая (2-5) в виде

$$a_k - \alpha_1 a_{k-1} - \alpha_2 a_{k-2} - \cdots - \alpha_n a_{k-n} = 0 \tag{2-6}$$

и сравнивая это соотношение со второй из формул (1-3) на стр. 2, мы видим, что выполнение рекуррентного соотношения (2-6) равносильно тому, что произведение

$$p(x) = (1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \cdots - \alpha_n x^n) \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = \\ = p_0 + p_1 x + \cdots + p_{n-1} x^{n-1} \quad (2\text{-}7)$$

является *многочленом* степени не выше $(n-1)$ — все коэффициенты при степенях x^k с $k \geqslant n$ занулятся в силу соотношения (2-6). Если известны первые n членов $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ последовательности a_i, многочлен $p(x)$ без труда вычисляется явным перемножением скобок из (2-7) (причём достаточно учитывать лишь члены степени меньшей n).

В результате задача отыскания явной формулы для a_k превращается в задачу явного развёртывания в степенной ряд рациональной функции

$$\frac{p(x)}{1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \cdots - \alpha_n x^n} \, . \quad (2\text{-}8)$$

Для отыскания этого ряда разложим знаменатель на множители:

$$1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \cdots - \alpha_n x^n = \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i x) = (1 - \lambda_1 x)(1 - \lambda_2 x) \cdots (1 - \lambda_n x) \, , \quad (2\text{-}9)$$

Упражнение 2.2. Покажите, что соотношение (2-9) равносильно тому, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ являются корнями многочлена

$$\chi(t) = t^n - \alpha_1 t^{n-1} - \alpha_2 t^{n-2} - \cdots - \alpha_n \quad (2\text{-}10)$$

(т. е. удовлетворяют равенству $\chi(t) = \prod\limits_{i=1}^{n} (t - \lambda_i)$). Многочлен (2-10) называется *характеристическим многочленом* уравнения (2-5).

Рассмотрим вначале случай, когда все числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ попарно различны, т. е. когда у характеристического многочлена (2-10) имеется ровно n различных корней.

Будем действовать как в n° 2.1 — разложим рациональную функцию (2-8) в сумму дробей

$$\frac{p(x)}{(1 - \lambda_1 x)(1 - \lambda_2 x) \cdots (1 - \lambda_n x)} = \frac{\beta_1}{1 - \lambda_1 x} + \frac{\beta_2}{1 - \lambda_2 x} + \cdots + \frac{\beta_n}{1 - \lambda_n x} \, , \quad (2\text{-}11)$$

числители которых $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ — некоторые константы, которые мы сейчас подберём. Умножая обе части (2-11) на общий знаменатель, мы видим что формула (2-11) равносильна равенству

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{\nu \neq i} (1 - \lambda_\nu x) \cdot \beta_i$$

на многочлены степени $\leqslant (n-1)$. Чтобы оно выполнялось тождественно по x, достаточно добиться его выполнения при каких-нибудь n различных значениях x. Подставляя значения $x = 1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \dots, 1/\lambda_n$, видим, что (2-11) имеет место при

$$\beta_i = \frac{\lambda_i^{n-1} p(1/\lambda_i)}{\prod\limits_{\nu \neq i} (\lambda_i - \lambda_\nu)} = \frac{p_0 \lambda_i^{n-1} + \cdots + p_{n-2} \lambda_i + p_{n-1}}{\prod\limits_{\nu \neq i} (\lambda_i - \lambda_\nu)} \, , \quad (2\text{-}12)$$

где $p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_{n-1} x^{n-1}$ — многочлен (2-7). Остаётся разложить каждую геометрическую прогрессию в правой части (2-11) по формуле

$$\frac{\beta_i}{1 - \lambda_i x} = \beta_i \cdot \sum_{k \geqslant 0} \lambda_i^k x^k = \beta_i + \beta_i \lambda_i x + \beta_i \lambda_i^2 x^2 + \beta_i \lambda_i^3 x^3 + \cdots$$

и сложить полученные разложения:

$$\frac{p(x)}{1-\alpha_1 x-\alpha_2 x^2-\ \cdots\ -\alpha_n x^n}=\sum_{k\geqslant 0}\left(\beta_1\lambda_1^k+\beta_2\lambda_2^k+\ \cdots\ +\beta_n\lambda_n^k\right)\cdot x^k\,.$$

Итак, если все n корней $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ характеристического уравнения

$$t^n-\alpha_1 t^{n-1}-\alpha_2 t^{n-2}-\ \cdots\ -\alpha_n=0$$

различны, решением рекуррентного уравнения $a_k=\alpha_1 a_{k-1}+\alpha_2 a_{k-2}+\ \cdots\ +\alpha_n a_{k-n}$ является сумма геометрических прогрессий

$$a_k=\beta_1\lambda_1^k+\beta_2\lambda_2^k+\ \cdots\ +\beta_n\lambda_n^k\,, \tag{2-13}$$

взятых с коэффициентами $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$, которые находятся по формулам (2-12).

Упражнение 2.3. Найдите формулу для k-того члена последовательности a_k заданной рекуррентными уравнениями

а) $a_k=3\,a_{k-1}-2\,a_{k-2}$, $a_0=0$, $a_1=1$;

б) $a_k=6\,a_{k-1}-11\,a_{k-2}+6\,a_{k-3}$, $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=2$.

В общем случае, когда у характеристического многочлена есть кратные корни, т. е.

$$1-\alpha_1 x-\alpha_2 x^2-\ \cdots\ -\alpha_n x^n=\prod_{i=1}^{r}(1-\lambda_i x)^{m_i}=(1-\lambda_1 x)^{m_1}(1-\lambda_2 x)^{m_2}\cdots(1-\lambda_r x)^{m_r}$$

(где все $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r$ различны и $m_1+m_2+\cdots+m_r=n$), рациональная функция (2-8) является суммой более сложных дробей:

$$\frac{p(x)}{(1-\lambda_1 x)^{m_1}(1-\lambda_2 x)^{m_2}\cdots(1-\lambda_r x)^{m_r}}=\frac{\beta_1(x)}{(1-\lambda_1 x)^{m_1}}+\frac{\beta_2(x)}{(1-\lambda_2 x)^{m_2}}+\ \cdots\ +\frac{\beta_n(x)}{(1-\lambda_r x)^{m_r}}\,,$$

числители которых $\beta_i(x)$ являются многочленами степени меньше m_i. Для их отыскания, а также для развёртывания в степенные ряды дробей вида $\beta(x)/(1-\lambda x)^m$ полезно умение *дифференцировать*.

§3. Дифференциальное исчисление рядов.

3.1. Производная. Подставим в степенной ряд

$$f(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots$$

вместо x сумму $x+t$, где t — ещё одна переменная. Получим ряд от двух переменных

$$f(x+t)=a_0+a_1(x+t)+a_2(x+t)^2+\cdots\,.$$

Раскроем в нём все скобки и сгруппируем слагаемые по степеням переменной t,

$$\begin{aligned} f(x+t)=\ & a_0\ + \\ & a_1 x+\ a_1\cdot t+ \\ & a_2x^2+\ 2\,a_2x\cdot t+\ a_2\cdot t^2+ \\ & a_3x^3+3\,a_3x^2\cdot t+3\,a_3x\cdot t^2+\ a_3\cdot t^3+ \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ =\ & f(x)+\ f_1(x)\cdot t+f_2(x)\cdot t^2+f_3(x)\cdot t^3+\ \cdots\ , \end{aligned} \tag{3-1}$$

где через $f_m(x)$ обозначен ряд, возникающий в качестве коэффициента при t^m.

Ряд $f_1(x)$, служащий коэффициентом при первой степени t, называется *производной* от исходного ряда f и обозначается $f'(x)$. Итак, производная — это первый, линейный по t, коэффициент приращения $f(x+t) - f(x)$, разложенного по степеням t:

$$f(x+t) = f(x) + f'(x) \cdot t + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\,. \tag{3-2}$$

3.1.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Производная от ряда $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ равна*

$$f'(x) = \sum_{k\geqslant 1} k\, a_k x^{k-1} = a_1 + 2\, a_2 x + 3\, a_3 x^2 + \ \cdots \tag{3-3}$$

(в частности, производная от константы равна нулю, а производная от многочлена является многочленом на единицу меньшей степени).

Доказательство. Покажем, что разность $f(x+t) - f(x)$ делится на t. Это следует из формулы

$$\frac{a^k - b^k}{a-b} = \underbrace{a^{k-1} + a^{k-2} b + a^{k-3} b^2 + \ \cdots + \ a b^{k-2} + b^{k-1}}_{k \text{ слагаемых}}\ .$$

Полагая в ней $a = (x+t)$, $b = x$, получаем

$$\frac{(x+t)^k - x^k}{t} = \underbrace{(x+t)^{k-1} + (x+t)^{k-2} x + (x+t)^{k-3} x^2 + \ \cdots + \ x^{k-1}}_{k \text{ слагаемых}}\,, \tag{3-4}$$

откуда

$$\begin{aligned}\frac{f(x+t)-f(x)}{t} &= a_1 \cdot \frac{(x+t)-t}{t} + a_2 \cdot \frac{(x+t)^2 - t^2}{t} + a_3 \cdot \frac{(x+t)^3 - t^3}{t} + \ \cdots = \\ &= \sum_{k\geqslant 1} a_k \cdot \left((x+t)^{k-1} + (x+t)^{k-2} x + (x+t)^{k-3} x^2 + \ \cdots + \ x^{k-1}\right)\ .\end{aligned} \tag{3-5}$$

Согласно (3-2), ряд $f'(x)$ — это свободный ряда (3-5), который мы рассматриваем как ряд от переменной t с коэффициентами, являющимися рядами от x. Для отыскания свободного положим в (3-5) $t = 0$. От этого каждая сумма (3-4) превращается в $k\, x^{k-1}$, и мы получаем формулу (3-3). □

3.1.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для любого числа $\alpha \in \mathbb{F}$ и любых рядов $f, g \in \mathbb{F}[[x]]$ справедливы равенства*

$$(\alpha f)' = \alpha \cdot f'\ , \quad (f+g)' = f' + g'\ , \quad (fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'\ . \tag{3-6}$$

Кроме того, если ряд g не имеет свободного члена, то

$$(f(g(x))' = g'(x) \cdot f'(g(x))\ , \tag{3-7}$$

а если ряд f обратим, то

$$(1/f)' = -\frac{f'}{f^2}\ . \tag{3-8}$$

Доказательство. Первые два равенства в (3-6) вытекают прямо из формулы (3-3). Для доказательства третьего равенства в (3-6) (его обычно называют *правилом Лейбница*) перемножим ряды

$$\begin{aligned} f(x+t) &= f(x) + t \cdot f'(x) + (\text{члены, делящиеся на } t^2) \\ g(x+t) &= g(x) + t \cdot g'(x) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\ . \end{aligned}$$

С точностью до членов, делящихся на t^2, получим

$$f(x+t) g(x+t) = f(x) g(x) + t \cdot (f'(x) g(x) + f(x) g'(x)) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\,,$$

откуда $(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Правило дифференцирования композиции рядов (3-7) доказывается похожим образом. Подставим в $f(x)$ вместо x ряд $g(x+t)$:

$$f(g(x+t)) = f\big(g(x) + t\cdot g'(x) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\big)\ .$$

Обозначая ряд, который прибавляется к $g(x)$ в аргументе f, через

$$\tau(x,t) = t\cdot g'(x) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\ ,$$

получаем

$$\begin{aligned} f(g(x+t)) = f\big(g(x) + \tau(x,t)\big) &= \\ &= f(g(x)) + \tau(x,t)\cdot f'(g(x)) + (\text{члены, делящиеся на } \tau(x,t)^2) = \\ &= f(g(x)) + t\cdot g'(x)\cdot f'(g(x)) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\ , \end{aligned}$$

откуда $(f(g(x))' = g'(x)\cdot f'(g(x))$.

Для доказательства последней формулы возьмём производные от обеих частей равенства $f\cdot f^{-1} = 1$. Получим $f'\cdot f^{-1} + f\cdot\left(f^{-1}\right)' = 0$, откуда $\left(f^{-1}\right)' = -f'/f^2$. □

3.2. Дифференцирование степеней. Последовательное применение правила Лейбница (третье равенство в (3-6)) позволяет дифференцировать произведения, состоящие из любого числа сомножителей:

$$\begin{aligned} (f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\cdot\ \cdots\ \cdot f_m(x))' = & f_1'(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\cdot\ \cdots\ \cdot f_m(x)+ \\ & + f_1(x)\cdot f_2'(x)\cdot f_3(x)\cdot\ \cdots\ \cdot f_m(x)+ \\ & + f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3'(x)\cdot\ \cdots\ \cdot f_m(x)+ \\ & +\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ + \\ & + f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\cdot\ \cdots\ \cdot f_m'(x)\ . \end{aligned}$$

Если все m сомножителей одинаковы, мы получаем формулу для дифференцирования степени

$$(f^m(x))' = m\cdot f^{m-1}(x)\cdot f'(x)\ . \tag{3-9}$$

С её помощью нетрудно развернуть в ряд m-тую степень геометрической прогрессии $1/(1-x)^m$.

Упражнение 3.1. Используя формулы (3-8) и (3-9) покажите, что m-тая производная от $1/(1-x)$ равна $m!/(1-x)^{m+1}$.

Дифференцируя $m-1$ раз обе части разложения $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ \cdots$, получим по предыдущей задаче

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(k+m-1)(k+m-2)\ \cdots\ (k+1)}{(m-1)!}\cdot x^k\ . \tag{3-10}$$

Эту формулу можно применять, например, для решения рекуррентных уравнений (2-5), характеристический многочлен которых имеет кратные корни, как это объяснялось в конце §2.

Упражнение 3.2. Пользуясь разложением (3-10) для $1/(1-x)^2$, напишите явную формулу для k-того члена последовательности a_k, заданной рекуррентным соотношением: $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ и $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2}$ при $k\geqslant 2$.

§4. Логарифмирование и экспоненцирование рядов.

4.1. Первообразный ряд. Формула для вычисления производной (3-3) показывает, что для любого ряда $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ существует единственный ряд без свободного члена, производная от которого равна $f(x)$. Он называется *первообразным рядом* или *интегралом* от f и обозначается

$$\int f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} a_0x + \frac{a_1}{2}\,x^2 + \frac{a_2}{3}\,x^3 + \cdots = \sum_{k\geqslant 1}\frac{a_{k-1}}{k}\,x^k\,. \tag{4-1}$$

4.2. Логарифм. Первообразный ряд от знакопеременной геометрической прогрессии называется *логарифмом* и обозначается

$$\ln(1+x) \overset{\text{def}}{=} \int\frac{dx}{1+x} = \int\left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\right)dx =$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\,. \tag{4-2}$$

Вместо $1+x$ в логарифм можно подставить любой ряд $u(x)$ с единичным свободным членом — ряд $\ln(u(x))$ получается подстановкой в правую часть (4-2) вместо x ряда $u(x)-1$ без свободного члена, что является, как мы видели в (n° 1.2), алгебраической операцией.

Упражнение 4.1. Выведите из формулы (3-7) для производной сложной функции, что для любого ряда u с единичным свободным членом $(\ln u)' = u'/u$ (правая часть этого равенства называется *логарифмической производной* от ряда u).

Обозначим множество всех рядов без свободного члена через $N \subset \mathbb{F}[[x]]$, а множество всех рядов с единичным свободным членом — через $U \subset \mathbb{F}[[x]]$. Множество N содержит нулевой ряд $f(x) = 0$ и замкнуто относительно операций сложения и вычитания рядов, а множество U содержит единичный ряд $f(x) = 1$ и замкнуто относительно операций умножения и деления рядов (все ряды с единичным свободным членом обратимы и на них можно делить).

Операция *логарифмирования*, переводящая ряд $u(x) \in U$ в ряд $\ln(u(x)) \in N$, является алгебраической и задаёт отображение

$$\log : U \xrightarrow{u\mapsto \ln u} N\,. \tag{4-3}$$

Мы собираемся показать, что это отображение взаимно однозначно и переводит умножение рядов в U в сложение рядов в N и наоборот. Для этого нам понадобится отображение, обратное к логарифмированию.

4.3. Экспонента. Ряд

$$e^x \overset{\text{def}}{=} \sum_{k\geqslant 0}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots \tag{4-4}$$

называется *экспонентой*. Этот ряд замечателен тем, что он совпадает со своей производной.

Упражнение 4.2. Убедитесь в том, что $f(x) = e^x$ — это *единственный* ряд со свободным членом единица, удовлетворяющий дифференциальному уравнению $f'(x) = f(x)$.

Подставляя в (4-4) вместо x любой ряд $\tau(x)$ без свободного члена, мы получаем ряд $e^{\tau(x)}$ со свободным членом 1, который называется *экспонентой* ряда $\tau(x)$. Таким образом, возникает экспоненциальное отображение

$$\exp : N \xrightarrow{\tau\mapsto e^\tau} U\,. \tag{4-5}$$

4.3.1. ТЕОРЕМА. *Экспоненциальное и логарифмическое отображения* (4-5) *и* (4-3) *обратны друг другу и переводят сложение рядов с нулевым свободным членом в умножение рядов с единичным свободным членом, т. е. для любых рядов* $u, u_1, u_2 \in U$ *и* $\tau, \tau_1, \tau_2 \in N$ *выполняются тождества:* $\ln e^{\tau} = \tau$, $e^{\ln u} = u$, $\ln(u_1 u_2) = \ln(u_1) + \ln(u_2)$, $e^{\tau_1+\tau_2} = e^{\tau_1} e^{\tau_2}$.

Доказательство. Для любых двух рядов f и g с одинаковыми свободными членами равенства $f = g$ и $f' = g'$ равносильны, поэтому для совпадения таких рядов достаточно проверить совпадение их производных. Ряды $\ln(e^x)$ и x оба имеют нулевой свободный член и одинаковые производные:

$$\ln(e^x)' = \frac{(e^x)'}{e^x} = \frac{e^x}{e^x} = 1 = x' .$$

Поэтому $\ln(e^x) = x$. Подставляя в это равенство вместо x любой ряд $\tau(x)$ без свободного члена, получаем

$$\ln e^{\tau} = \tau \quad \forall\, \tau \in N \ . \tag{4-6}$$

Из этой формулы вытекает, что логарифмирование $U \xrightarrow{\ln} N$ является отображением «на» — любой ряд $\tau \in N$ является логарифмом от ряда $e^{\tau} \in U$. Покажем, что разные ряды из U

$$u_1(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \quad \text{и} \quad u_2(x) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

имеют разные логарифмы. Если $\ln(u_1) = \ln(u_2)$, то производная $\ln(u_1)' = u_1'/u_1$ равна производной $\ln(u_2)' = u_2'/u_2$, что после приведения к общему знаменателю даёт равенство

$$(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots) \cdot (1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) = (b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \cdots) \cdot (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) .$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x получаем соотношения

$$\begin{gathered} a_1 = b_1 \\ 2a_2 + a_1 b_1 = a_1 b_1 + 2b_2 \\ 3a_3 + 2a_2 b_1 + a_1 b_2 = a_2 b_1 + 2a_1 b_2 + 3b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k \cdot a_k \ + \sum_{m=1}^{k-1} m \cdot a_m b_{k-m-1} = \sum_{m=1}^{k-1} m \cdot b_m a_{k-m-1} \ + \ k \cdot b_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

из которых последовательно вытекает, что $a_k = b_k$ для всех k , т. е. $u_1(x) = u_2(x)$.

Итак, отображение логарифмирования $U \xrightarrow{\ln} N$ взаимно однозначно. Из соотношения (4-6) вытекает тогда, что для любого ряда $u \in U$ выполняется равенство $e^{\ln u} = u$ — для доказательства прологарифмируем обе части с учётом (4-6). Таким образом, экспоненцирование является обратным к логарифмированию отображением. В частности, оно тоже взаимно однозначно.

Для любых рядов $u_1, u_2 \in U$ ряды $\ln(u_1 u_2)$ и $\ln u_1 + \ln u_2$ оба имеют нулевой свободный член и одинаковые производные:

$$(\ln(u_1 u_2))' = \frac{(u_1 u_2)'}{u_1 u_2} = \frac{u_1' u_2 + u_1 u_2'}{u_1 u_2} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} = (\ln u_1)' + (\ln u_2)' = (\ln u_1 + \ln u_2)' \ .$$

Поэтому $\ln(u_1 u_2) = \ln u_1 + \ln u_2$. Таким образом, логарифмирование $U \xrightarrow{\ln} N$ переводит умножение рядов в U в сложение рядов N. Поскольку экспоненцирование является обратным к логарифмированию взаимно однозначным отображением, оно переводит суммы рядов в произведения. □

Упражнение 4.3. Покажите, что $\forall\, u \in U \ \ \ln(1/u) = -u$.

§5. Бином Ньютона.

5.1. Степень с произвольным показателем. Для любого числа $\alpha \in \mathbb{F}$ определим *биномиальный ряд* с показателем α формулой

$$(1+x)^{\alpha} \overset{\text{def}}{=} e^{\alpha \ln(1+x)}.$$

Подставляя вместо $1+x$ произвольные ряды $u(x)$ с единичным свободным членом[1] мы получаем на множестве рядов с единичным свободным членом алгебраическую операцию *возведения в α-тую степень*

$$U \xrightarrow{u \mapsto u^{\alpha} = e^{\alpha \ln u}} U\,,$$

определённую для любого числа $\alpha \in \mathbb{F}$. Эта операция обладает всеми интуитивно ожидаемыми от возведения в степень алгебраическими свойствами, которые немедленно вытекают из установленных в (n° 4.3.1) свойств экспоненты и логарифма. А именно, для любых рядов $u, v \in U$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ выполняются равенства

$$u^{\alpha} \cdot u^{\beta} = e^{\alpha \ln u} \cdot e^{\beta \ln u} = e^{\alpha \ln u + \beta \ln u} = e^{(\alpha+\beta) \ln u} = u^{\alpha+\beta} \tag{5-1}$$

$$(u^{\alpha})^{\beta} = e^{\beta \ln(u^{\alpha})} = e^{\beta \ln\left(e^{\alpha \ln u}\right)} = e^{\alpha\beta \ln u} = u^{\alpha\beta} \tag{5-2}$$

$$(uv)^{\alpha} = e^{\alpha \ln(uv)} = e^{\alpha(\ln u + \ln v)} = e^{\alpha \ln u + \alpha \ln v} = e^{\alpha \ln u} \cdot e^{\alpha \ln v} = u^{\alpha} v^{\alpha} \tag{5-3}$$

В частности, для любого ряда u с единичным свободным членом $u^{1/n} = \sqrt[n]{u}$ в том смысле, что $\left(u^{1/n}\right)^n = u$.

5.2. Биномиальные коэффициенты. Чтобы написать для коэффициентов бинома

$$(1+x)^{\alpha} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\,,$$

явные формулы, вычислим его логарифмическую производную (см. упр. 4.1):

$$\frac{((1+x)^{\alpha})'}{(1+x)^{\alpha}} = (\ln(1+x)^{\alpha})' = \left(\ln e^{\alpha \ln(1+x)}\right)' = \left(\alpha \ln(1+x)\right)' = \frac{\alpha}{1+x}\,.$$

Приводя левую и правую часть к общему знаменателю, получаем соотношение

$$\left(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ \cdots\ \right) \cdot (1+x) = \alpha \cdot (1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ \cdots\ )\,.$$

Сравнение коэффициентов при x^{k-1} в правой и левой части приводит к равенствам

$$k a_k + (k-1) a_{k-1} = \alpha a_{k-1}\,,$$

из которых последовательно находим

$$a_k = \frac{\alpha - (k-1)}{k} \cdot a_{k-1} = \frac{(\alpha-(k-1))(\alpha-(k-2))}{k(k-1)} \cdot a_{k-2} = \ \cdots$$
$$\cdots\ = \frac{(\alpha-(k-1))(\alpha-(k-2)) \cdots (\alpha-1)\alpha}{k!}\,.$$

Стоящая в правой части дробь имеет и в числителе и в знаменателе по k множителей, представляющих собою числа, последовательно уменьшающиеся на единицу: в знаменателе — от k до

[1] что, как и выше, в случае логарифмирования, означает подстановку вместо x ряда $u(x)-1$ без свободного члена, что является алгебраической операцией

1, в числителе — от α до $(\alpha - k + 1)$. Эта дробь называется *биномиальным коэффициентом* и обозначается

$$\binom{\alpha}{k} \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \tag{5-4}$$

Нами доказана

5.2.1. ТЕОРЕМА (ФОРМУЛА НЬЮТОНА). *Для любого числа $\alpha \in \mathbb{F}$ имеется разложение*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k\geqslant 0} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots .$$

□

5.3. Бином с натуральным показателем. При натуральном значении показателя $\alpha = n \in \mathbb{N}$ имеется лишь конечное число ненулевых биномиальных коэффициентов, поскольку при $k > n$ в числителе (5-4) образуется нулевой сомножитель. Поэтому разложение бинома с натуральным показателем конечно:

$$(1+x)^n = 1 + n\,x + \frac{n(n-1)}{2}\,x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k ,$$

а сами биномиальные коэффициенты в этом случае симметричны относительно замены k на $n-k$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n(n-1)\cdots(k+1)}{(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Упражнение 5.1. Покажите, что это число равно количеству n-буквенных слов, которые можно написать k буквами а и $(n-k)$ буквами б (в частности, оно является *целым*, что не вполне очевидно).

5.4. Бином с отрицательным показателем. При $\alpha \notin \mathbb{N}$ биномиальный ряд имеет бесконечно много ненулевых коэффициентов. Например, для целой отрицательной степени $\alpha = -m$, $m \in \mathbb{N}$, мы снова получаем разложение (3-10)

$$\frac{1}{(1+x)^m} = 1 - m\,x + \frac{m(m+1)}{2}\,x^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{6}\,x^3 + \cdots = \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \binom{m+k}{k} \cdot x^k ,$$

другим способом полученное нами в n° 3.2.

5.5. Разложение радикалов. При $\alpha = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ формула Ньютона разворачивает в степенной ряд радикал

$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{1}{n}x + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2}\,x^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{6}\,x^3 + \cdots =$$
$$= 1 + \frac{x}{n} - \frac{n-1}{2}\cdot\frac{x^2}{n^2} + \frac{(n-1)(2n-1)}{2\cdot 3}\cdot\frac{x^3}{n^3} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{x^4}{n^4} + \cdots .$$

В частности, при $n = 2$ в качестве коэффициента при x^k мы получаем дробь вида

$$(-1)^{k-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2k)} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\frac{(2k)!}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2k))^2} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)\cdot 4^k}\cdot\binom{2k}{k}.$$

Таким образом,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\binom{2k}{k}\cdot\frac{x^k}{4^k} . \tag{5-5}$$

5.6. Числа Каталана. Воспользуемся разложением (5-5) для получения явной формулы для одной замечательной последовательности чисел, часто возникающей в различных комбинаторных задачах. Пусть при вычислении суммы $(n+1)$ слагаемых

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad \text{(всего } n \text{ плюсов)} \tag{5-6}$$

в каждый момент времени разрешается делать не более одного сложения. Такое вычисление разбивается на n последовательных шагов, на каждом из которых выполняется некоторое конкретное сложение, в результате чего все знаки «+» оказываются занумерованными в том порядке, в котором они выполняются. Количество всех возникающих таким способом нумераций n плюсов называется n-ым *числом Каталана* c_n. Удобно также по определению считать, что $c_0 = 1$.

Отметим, что рассматриваемые нами нумерации плюсов далеко не произвольны.

Упражнение 5.2. Убедитесь, что $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$, $c_4 = 14$ (и, тем самым, $c_n \neq n!$).

Количество способов вычислить сумму (5-6) так, чтобы последним выполняется i-тый слева плюс, равно $c_{i-1}c_{n-i}$ — мы можем независимо посчитать сумму i чисел, стоящих слева от i-того плюса, и $n-i+1$ чисел, стоящих от него справа, для чего у нас имеется, соответственно, c_{i-1} и c_{n-i} способов. Таким образом, числа Каталана c_n удовлетворяют соотношению

$$c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \cdots + c_{n-2}c_1 + c_{n-1}c_0 \;, \tag{5-7}$$

i-тое слагаемое которого учитывает все вычисления, в которых последним выполняется i-тый слева плюс записи (5-6). Чтобы выразить c_n через n явно, образуем степенной ряд

$$c(x) = \sum_{k\geqslant 0} c_k x^k = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots \;.$$

Равенство (5-7) означает, что этот ряд удовлетворяет соотношению

$$\frac{c(x)-1}{x} = c(x)^2 \;.$$

Иначе говоря, $c(x)$ является решением следующего квадратного уравнения на неизвестную t:

$$x \cdot t^2 - t - 1 = 0 \;.$$

По стандартной школьной формуле находим[1] $c(x) = \left(1-\sqrt{1-4x}\right)/(2x)$. По (5-5)

$$\sqrt{1-4x} = -\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2k-1} \cdot \binom{2k}{k} \cdot x^k \,,$$

откуда

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \binom{2k+2}{k+1} = \frac{1}{k+1} \cdot \binom{2k}{k} \,.$$

Отметим, что с первого взгляда снова не очевидно, что это число — целое.

Упражнение 5.3. В выпуклом n угольнике проводят максимально возможное число диагоналей так, чтобы они не пересекались нигде, кроме вершин. Сколькими способами это можно сделать?

[1]обратите внимание, что ряд $1-\sqrt{1-4x}$ не имеет свободного члена и потому делится в $\mathbb{Q}[[x]]$ на $2x$, причём частное имеет свободный член $c_0 = 1$, как нам и требуется; второе решение $\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ не является «целым» степенным рядом: знаменатель не обратим, а числитель, имея ненулевой свободный член, на него не делится

§6. Вычисление степенных сумм.

6.1. Задача Бернулли. В работе «Ars Conjectandi» Яков Бернулли не без гордости отмечал[1], что сумел просуммировать десятые степени первой тысячи натуральных чисел менее, чем за половину четверти часа. Речь идёт о вычислении суммы $1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+1000^{10}$, которое Бернулли проделал при помощи открытой им формулы, выражающей сумму

$$S_m(n)=0^m+1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m=\sum_{k=0}^{n}k^m \tag{6-1}$$

в виде многочлена $(m+1)$-ой степени от n.

Многочлены $S_0(n)=n$ и $S_1(n)=n(n+1)/2$, дающие решение этой задачи для первых двух значений степени $m=0$ и $m=1$, вероятно, хорошо знакомы читателю:

$$S_0(n)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\ \text{раз}}=n\,,$$
$$S_1(n)=1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2\,.$$

Следующие два многочлена, решающие задачу для $m=2,\,3$, пожалуй, уже менее известны:

$$S_2(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6\,,$$
$$S_3(n)=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=n^2(n+1)^2/4=S_1(n)^2\,.$$

Предлагаемый ниже способ отыскания многочлена $S_m(t)$, значение которого при целых неотрицательных $t=n$ равно сумме (6-1), основывается на возможности записывать некоторые отображения $\mathbb{Q}[t]\longrightarrow\mathbb{Q}[t]$, из множества многочленов в себя, в виде степенных рядов от оператора дифференцирования.

6.2. Подстановка дифференцирования в степенной ряд. Отображение

$$D\ :\ \mathbb{Q}[t]\xrightarrow{p(t)\mapsto p'(t)}\mathbb{Q}[t]\,,$$

сопоставляющее каждому многочлену $p(t)$ его производную $p'(t)$, называется *оператором дифференцирования.* Согласно предложению (n° 3.1.2) оператор D, а также любая его степень

$$D^k=D\circ D\circ\cdots\circ D\,,$$

переводящая многочлен p в его k-тую производную $D^kp(t)$, перестановочны со сложением многочленов и умножением многочленов на числа, т. е.

$$D^k(\alpha\cdot p(t)+\beta\cdot q(t))=\alpha\cdot D^kp(t)+\beta\cdot D^kq(t)\qquad\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\ \text{и}\ \forall\,p,q\in\mathbb{Q}[t]\,. \tag{6-2}$$

Мы будем подставлять оператор D вместо переменной x в степенные ряды

$$f(x)=\sum_{k\geqslant0}a_kx^k\in\mathbb{Q}[[x]]\,.$$

По определению, результатом такой подстановки является отображение $f(D)\ :\ \mathbb{Q}[t]\longrightarrow\mathbb{Q}[t]$, переводящее многочлен $p\in\mathbb{Q}[t]$ в

$$f(D)p=(a_0+a_1D+a_2D^2+\cdots)p=a_0\cdot p+a_1\cdot Dp+a_2\cdot D^2p+\cdots=\sum_{k\geqslant0}a_k\cdot D^kp\,. \tag{6-3}$$

[1] сочинение «Ars Conjectandi» было опубликовано в 1713 уже после смерти Якова Бернулли (1654–1705)

(для единообразия записи мы полагаем $D^0 p \overset{\text{def}}{=} p$). Поскольку каждое применение D к многочлену уменьшает его степень на единицу, все производные $D^k p$ с $k > \deg p$ в правой части (6-3) обращаются в нуль, так что сумма состоит из конечного числа ненулевых слагаемых. Таким образом, правая часть (6-3) действительно является многочленом, который можно полностью вычислить конечным числом арифметических действий над коэффициентами исходного многочлена p и первыми $\deg(p)$ коэффициентами ряда f.

Упражнение 6.1. Вычислите результат применения операторов $\sqrt{1+D}$ и e^D к многочлену t^2.

6.3. Разностные операторы на пространстве многочленов. Всякое отображение

$$\mathbb{Q}[t] \longrightarrow \mathbb{Q}[t],$$

представимое в виде $f(D)$ для какого-нибудь ряда $f(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$, называется *разностным оператором* на пространстве многочленов. Разностные операторы замечательны тем, что для вычисления их композиции достаточно просто перемножить соответствующие ряды:

$$f(D)\circ g(D) = p(D)\,, \quad \text{где } p(x) = f(x)g(x) \text{ в } \mathbb{Q}[[x]]\,.$$

В частности, любые два разностных оператора перестановочны друг с другом:

$$f(D)\circ g(D) = g(D)\circ f(D)\,.$$

Кроме того, из формулы (6-2) немедленно вытекает, что любой разностный оператор $f(D)$ перестановочен со сложением многочленов и умножением многочленов на числа, т. е.

$$f(D)(\alpha \cdot p(t) + \beta \cdot q(t)) = \alpha \cdot f(D)p(t) + \beta \cdot f(D)q(t) \qquad \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{Q} \text{ и } \forall\, p,q \in \mathbb{Q}[t]\,.$$

Поэтому для вычисления значения оператора $f(D) = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots$ на произвольном многочлене достаточно уметь вычислять значение оператора $f(D)$ на всех одночленах t^m:

$$f(D)\,(p_0 + p_1 t + \cdots + p_n t^n) = p_0 a_0 + p_1 f(D)t + p_2 f(D)t^2 + \ \cdots\ + p_n f(D)t^n\,,$$

причём $f(D)t^k$ является для каждого k многочленом степени $\leqslant k$, зависящим только от первых $k+1$ коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_k$ ряда f.

6.4. Операторы сдвига аргумента. Воспользуемся предыдущим замечанием для явного описания действия на $\mathbb{Q}[t]$ экспоненты

$$e^D = 1 + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \ \cdots\ .$$

Поскольку $D^k t^m = m(m-1)\ \cdots\ (m-k+1)\cdot t^{m-k}$, из формулы бинома с натуральным показателем (см. (n° 5.3)) мы заключаем, что

$$e^D t^m = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} D^k t^m = \sum_{k\geqslant 0} \frac{m(m-1)\ \cdots\ (m-k+1)}{k!}\, t^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} t^{m-k} = (t+1)^m\,.$$

Таким образом, оператор e^D переводит любой многочлен $p(t)$ в $e^D p(t) = p(t+1)$, т. е. сдвигает переменную t на единицу.

Поскольку ряды e^x и e^{-x} обратны друг другу, операторы e^D и e^{-D} тоже обратны друг другу, и, стало быть, оператор e^{-D} сдвигает аргумент в противоположную сторону:

$$e^{-D}p(t) = p(t-1)\,.$$

Упражнение 6.2. Убедитесь в этом явным вычислением многочленов $e^{-D}t^k$.

6.5. Решение задачи Бернулли при помощи ряда Тодда. Рассмотрим отображение[1]

$$\nabla = 1 - e^{-D} \;:\; \mathbb{Q}[t] \xrightarrow{p(t)\mapsto p(t)-p(t-1)} \mathbb{Q}[t]$$

которое получается подстановкой $x = D$ в ряд $1 - e^{-x} \in \mathbb{Q}[[x]]$ и переводит многочлен $p(t)$ в разность $\nabla p(t) = p(t) - p(t-1)$. Пусть многочлен $S_m(t) \in \mathbb{Q}[t]$ решает задачу Бернулли для показателя m , т. е. удовлетворяет при всех целых неотрицательных $t = n$ соотношению

$$S_m(n) = 0^m + 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m \,.$$

Тогда $\nabla S_m(t) = t^m$. Если бы нам удалось найти в $\mathbb{Q}[[x]]$ ряд $f(x)$, обратный к ряду $1 - e^{-x}$, то оператор $f(D)$ был бы обратен к оператору ∇, что давало бы для $S_m(t)$ явную формулу: $S_m(t) = f(D)\nabla S_m(t) = f(D)t^m$. Но, к сожалению, ряд $1 - e^{-x}$ имеет нулевой свободный член, и поэтому не обратим.

Однако, не будем отчаиваться — вынесем из $1 - e^{-x}$ препятствующий обратимости множитель x, переписав этот ряд в виде произведения

$$1 - e^{-x} = \frac{1 - e^{-x}}{x} \cdot x \,.$$

Ряд $(1 - e^{-x})/x$ уже обратим, поскольку его свободный член равен 1. Обратный к нему ряд

$$\mathrm{td}(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{x}{1 - e^{-x}} \in \mathbb{Q}[[x]]$$

называется *рядом Тодда*. Из равенства $\mathrm{td}(x)\cdot(1-e^{-x}) = x$ вытекает соотношение $\mathrm{td}(D)\circ\nabla = D$, которое позволяет найти производную от искомого нами многочлена $S_m(t)$:

$$S'_m(t) = DS_m(t) = \mathrm{td}(D)\nabla S_m(t) = \mathrm{td}(D)t^m \,.$$

Поскольку $S_m(0) = 0$, многочлен $S_m(t)$ не имеет свободного члена и находится интегрированием $S'_m(t)$ по формуле из n° 4.1. Для этого удобно записать ряд Тодда в «экпоненциальной форме», вынеся из коэффициентов обратные факториалы:

$$\mathrm{td}(x) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{a_k}{k!}\, x^k \tag{6-4}$$

Тогда ответ на задачу Бернулли даётся формулой

$$\begin{aligned} S_m(t) &= \int\Bigl(\sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{k!} D^k t^m\Bigr)\,dt = \int\Bigl(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a_k t^{m-k}\Bigr)\,dt = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{a_k t^{m-k+1}}{m-k+1} = \\ &= \frac{1}{m+1}\left(\binom{m+1}{1} a_m t + \binom{m+1}{2} a_{m-1} t^2 + \cdots + \binom{m+1}{m} a_1 t^m + \binom{m+1}{m+1} a_0 t^{m+1}\right) \,, \end{aligned}$$

которую часто представляют в символическом виде

$$(m+1)\cdot S_m(t) = (a{\downarrow} + t)^{m+1} - a_{m+1} \,,$$

где стрелка у $a{\downarrow}$ предписывает заменять a^k на a_k при раскрытии бинома $(a+t)^{m+1}$.

Числа a_k находятся из определяющего ряд Тодда соотношения $\mathrm{td}(x)\cdot(1-e^{-x})/x = 1$, которое в развёрнутом виде выглядит как

$$\Bigl(1 + a_1 x + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{6}x^2 + \frac{a_4}{24}\,x^4 + \cdots\Bigr)\cdot\Bigl(1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{6}\,x^2 - \frac{1}{24}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^4 - \cdots\Bigr) = 1 \,.$$

[1]символ ∇ читается «набла»

Упражнение 6.3. Найдите первую дюжину чисел a_k (сверить значения можно в сноске ([1])).

Упражнение 6.4. Напишите явные формулы для $S_4(n)$ и $S_5(n)$ (сверить значения можно в сноске ([2])).

Упражнение 6.5*. Попробуйте повторить достижение Бернулли — вычислите[3] $S_{10}(1000)$.

6.6. Нечётная составляющая ряда Тодда. Решение упр. 6.3 наводит на мысль, что все коэффициенты a_k с нечётными номерами $k \geqslant 3$ равны нулю. Докажем это. Ряд $\frac{1}{2}\big(\mathrm{td}(x) - \mathrm{td}(-x)\big)$ не содержит чётных степеней x, а при нечётных степенях имеет те же коэффициенты, что и ряд $\mathrm{td}(x)$. Поскольку

$$\mathrm{td}(x) - \mathrm{td}(-x) = \frac{x}{1-e^{-x}} + \frac{x}{1-e^{x}} = x \cdot \frac{2 - e^{x} - e^{-x}}{(1-e^{-x})\cdot(1-e^{x})} = x\ ,$$

единственный член нечётной степени в ряде Тодда — это $x/2$.

6.7. Числа Бернулли. Название «ряд Тодда» вошло в обиход лишь во второй половине XX века после работ Хирцебруха и Гротендика по топологии и алгебраических многообразий, где ряд $\mathrm{td}(x)$ применялся для формулировки и доказательства теоремы Риана–Роха. Во времена Бернулли и Эйлера предпочитали пользоваться рядом

$$\mathrm{td}(-x) = \frac{x}{e^{x}-1}\ ,$$

который, как мы видели выше, отличается от $\mathrm{td}(x)$ ровно одним членом (имеет $-x/2$ вместо $x/2$). Записывали его тоже в «экспоненциальном виде»:

$$\frac{x}{e^{x}-1} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{B_k}{k!}\, x^k\ .$$

Коэффициенты B_k этого разложения называются *числами Бернулли*. Таким образом, $B_k = a_k$ при $k \neq 1$ (и обращаются в нуль при всех нечётных $k \geqslant 3$), а $B_1 = -a_1 = -1/2$. Со времён своего открытия Яковом Бернули, числа B_k вызывают неослабевающий интерес исследователей. Им посвящена обширная литература, начать знакомиться с которой я советую с книг:

К. Айрлэнд, *М. Роузен*. *Классическое введение в современную теорию чисел* (гл. 15).

З. И. Боревич, *И. Р. Шафаревич*. *Теория чисел* (§ 8 гл. V).

Имеется даже специальный интернет-ресурс `http://www.bernoulli.org/`, где читатель найдёт массу дополнительной информации, дальнейшие ссылки и компьтерную программу, вычисляющую числа B_k в виде несократимых рациональных дробей. В заключение отментим, что не смотря на огромное количество красивых теорем о числах Бернулли, никакой внятной формулы, явно выражающей B_n через n нет, и любой содержательный новый взгляд в этом направлении явился бы ярким достижением.

Упражнение 6.6. Получите для чисел Бернулли рекурсивную формулу

$$(n+1)B_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k\ .$$

Упражнение 6.7*. Докажите, что числа B_k с чётными $k \geqslant 2$ имеют чередующиеся знаки.

[1] $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{30}$, $a_5 = 0$, $a_6 = \frac{1}{42}$, $a_7 = 0$, $a_8 = -\frac{1}{30}$, $a_9 = 0$, $a_{10} = \frac{5}{66}$, $a_{11} = 0$, $a_{12} = -\frac{691}{2730}$

[2] $S_4(n) = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$, $S_5(n) = n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)/12$

[3] напомню, у Бернулли на это ушло около 7 минут, причём калькуляторов в те годы не было…