

**УСТНЫЙ ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ**  
**НА ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ**

**ЗАДАЧА 1.** Сколькоими способами можно в клетках квадрата  $3 \times 3$  расставить числа от 1 до 9 (каждое занимает одну клетку и встречается один раз) так, чтобы сумма чисел на каждой из двух диагоналей равнялась 8?

(ответ: 192)

**ЗАДАЧА 2.** Для каждой точки с координатами  $(p, q)$  рассмотрим квадратный трехчлен  $x^2 + px + q$ . Покрасим точку зеленым цветом, если соответствующий квадратный трехчлен имеет два корня, один из которых принадлежит отрезку  $[-2, -1]$ , а другой — отрезку  $[1, 2]$ . Изобразите на плоскости множество зеленых точек и найдите его площадь.

(ответ: четырехугольник с вершинами  $(-1, -2)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(1, -2)$  и  $(0, -4)$ ; площадь равна 3)

**ЗАДАЧА 3.** В треугольнике  $ABC$  расстояние от вершины  $C$  до точки пересечения высот равно радиусу описанной окружности. Какой может быть величина угла  $C$ ?

(ответ:  $C = \pi/3$ ,  $2\pi/3$ )

**ЗАДАЧА 4.** Пусть  $S_1$  — сфера радиуса 7, а  $S_2$  — сфера радиуса 1, расположенные в пространстве так, что расстояние между их центрами равно 10. Прямая  $l$  касается первой сферы в точке  $K_1$ , а второй — в точке  $K_2$ .

Какую максимальную и какую минимальную длину может иметь отрезок  $K_1K_2$ ?

(ответ: минимальная длина общей касательной равна 6, а максимальная — 8)

**ЗАДАЧА 5.** Найдите все целочисленные решения системы уравнений

$$\begin{cases} a^4 - b^4 - c^4 = a^2 b^2 c^2 \\ a^3 = b^2 + c^2. \end{cases}$$

(ответ:  $a = 0, b = 0, c = 0$ ;  $a = 1, b = \pm 1, c = 0$ ;  $a = 1, b = 0, c = \pm 1$ )