

ГУ-ВШЭ, ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ  
ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В АСПИРАНТУРУ  
(ДЕМОВАРИАНТ)

1. Пусть  $x_n$  — положительный корень уравнения  $\cos x = nx$  ( $n$  — целое положительное число). Найдите асимптотику последовательности  $\{x_n\}$ .
2. Пусть  $C \subset [0; 1]$  — «классическое» канторово множество (получаемое удалением средних третей). Можно ли найти число  $\alpha > 1$  и непостоянную функцию  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющие условию

$$|f(x) - f(y)| \leq 2010|x - y|^\alpha \quad \text{для всех } x, y \in C?$$

3. Пусть

$$I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq x_n \leq 1\},$$

и пусть  $f(x_1, \dots, x_n)$  равно второму снизу по величине из чисел  $x_1, \dots, x_n$ . Найдите  $\int_{I^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ .

4. Сколько силовских  $p$ -подгрупп содержится в группе  $GL_n(\mathbb{F}_p)$  ( $\mathbb{F}_p$  — поле из  $p$  элементов)?
5. Конечно или бесконечно множество простых чисел  $p$ , для которых сравнение  $x^2 \equiv 19 \pmod{p}$  имеет целое решение?
6. Пусть  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ . Функция  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывна на  $D$  и голоморфна на внутренности  $D$ , причем на границе  $D$  функция  $f$  принимает только действительные значения. Докажите, что  $f$  — константа.