5. РАССЛОЕНИЯ И ТОЧНАЯ ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ.

Задача 1. В приведенных ниже примерах вычислите точную гомотопическую последовательность пары (A, B) (то есть опишите явно входящие в нее группы и гомоморфизмы). Для относительных гомотопических групп $\pi_i(A, B)$ укажите явно изоморфизм с группами $\pi_i(A/B)$. а) $A = S^1$, $B \subset A$ — множество из двух точек. б) A — полноторие ($S^1 \times D^2$), а B — его граница (гомеоморфная тору $S^1 \times S^1$).

Напомним, что расслоением с тотальным пространством E, базой B и слоем F называется непрерывное отображение $p : E \to B$ такое, что для всякой точки $b \in B$ найдется окрестность U и непрерывное отображение $\lambda : p^{-1}(U) \to F$ (*тривиализация расслоения над* U), такое что отображение $\Lambda : p^{-1}(U) \to U \times F$, заданное формулой $\Lambda(x) = (p(x), \lambda(x))$, является гомеоморфизмом.

Задача 2. Докажите, что приведенные ниже отображения являются расслоениями: а) проекция ленты Мебиуса на ее среднюю линию; б) E — множество пар (v_1, v_2) ортогональных друг другу единичных векторов, $B = S^2$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, $p : E \to B$ действует по формуле $p(v_1, v_2) = v_1$; в) (расслоение Хопфа) $E = S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$, $B = \mathbb{C}P^1$ (гомеоморфно двумерной сфере), $p : E \to B$ действует по формуле $p(z, w) = [z : w]$; г*) E — множество пар, состоящих из k-мерного подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ и линейного отображения $A : L \to \mathbb{R}^n/L$, $B = G(n, k)$ (грассманиан — множество k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$), а $p : E \to B$ — проекция $p(L, A) = L$. Опишите более подробно случай $k = 1$ (когда B — проективное пространство).

Задача 3. а) Придумайте расслоение, база и слой которого гомеоморфны окружности, а тотальное пространство — бутылке Клейна. б*) Докажите, что расслоение пункта 2г изоморфно касательному расслоению к $G(n, k)$.

Задача 4. Выпишите точную гомотопическую последовательность (т.е. все входящие в нее группы и гомоморфизмы) а) расслоения Хопфа (задача 2в) до члена π_3; б) расслоения задачи 2б, до члена π_3; в) расслоения задачи 3а.

Указание. В пункте 4б к векторам v_1, v_2 можно единственным способом добавить вектор v_3 так, чтобы получился правый ортонормированный базис. Следовательно, E гомеоморфно множеству таких базисов, т.е. группе $\mathrm{SO}(3)$. При решении задачи 4б полезно знать ответ в задаче 4а.

Задача 5 (предупреждающий контрпример). Пусть $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ (трехмерная сфера). Группа $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ комплексных чисел, по модулю равных единице, действует на S^3 следующим образом: $\lambda(z, w) = (\lambda z, \lambda^n w)$, где $n \in \mathbb{Z}$. Докажите, что а) каждая орбита действия гомеоморфна окружности; б) пространство орбит Ω гомеоморфно $\mathbb{C}P^1$ (т.е. двумерной сфере); в) отображение $p : S^3 \to \Omega$, переводящее каждую точку $(z, w) \in S^3$ в ее орбиту, не является расслоением, если $n \neq \pm 1$. Что это за расслоение при $n = 1$?

Задача 6. Пусть E — пространство пар (a, ℓ), где $\ell \subset \mathbb{R}^n$ — прямая (не обязательно проходящая через начало координат), а $a \in \ell$ — точка. Отображения $p_1 : E \to \mathbb{R}^n$ и $p_2 : E \to Y$, где Y — множество прямых в $\mathbb{R}^n$, действуют по формулам $p_1(a, \ell) = a$, $p_2(a, \ell) = \ell$. а) Докажите, что p_1 и p_2 — расслоения; чему гомеоморфны их слои? б) Тривиальны ли эти расслоения?

Замечание. Можно считать, что $n = 2$, если это облегчает рассуждения.

Задача 7. Пусть $p : S^3 \to S^2$ — расслоение Хопфа. Пусть $S^2 = U_1 \cup U_2$, где U_1 — сфера без южного полюса, а U_2 — без северного. Обозначим $\lambda_1 : U_1 \to S^1$ тривиализацию расслоения над U_1, а $\lambda_2 : U_2 \to S^1$ — над U_2; для точек $x \in U_1 \cap U_2$ пусть $\lambda(x)$ — угол между точками $\lambda_1(x) \in S^1$ и $\lambda_2(x) \in S^1$. Пусть $\Omega \subset S^2$ — экватор сферы. а) Зафиксируйте какие-нибудь тривиализации λ_1 и λ_2 и найдите степень отображения $\lambda|_\Omega : \Omega \to S^1$ (это отображение из окружности в окружность). б) Докажите, что эта степень не зависит от выбора тривиализаций λ_1 и λ_2. в) Ответьте на те же вопросы для расслоения задачи 2б.

Задача 8. Постройте расслоение, для которого ответ на вопрос задачи 7а является заранее заданным целым числом k, и выпишите точную гомотопическую последовательность этого расслоения до члена π_2.

Задача 9. Пусть M_g — сфера с g ручками, а E_g — пространство касательных векторов к M_g единичной длины. Пусть $p : E_g \to M_g$ — естественная проекция, а $\Omega = p^{-1}(b)$ — слой над отмеченной точкой $b \in M_g$. а) Докажите, что p — локально тривиальное расслоение со слоем S^1. б) Докажите, что образ $\iota_*(\pi_1(S^1)) \subset \pi_1(E_g)$

является нормальной подгруппой, факторгруппа по которой изоморфна $\pi_1(M_g)$; здесь $\iota : \Omega \to E_g$ — отображение вложения (которое каждой точке $\Omega \subset E_g$ сопоставляет ее же, но уже как точку E_g). в) Докажите, что $\iota_*(\pi_1(S^1))$ изоморфна $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ и лежит в центре группы $\pi_1(E_g)$; обозначим образующую этой группы u. г) Пусть поверхность M_g склеена стандартным образом из $4g$-угольника; обозначим $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \in \pi_1(M_g)$ классы петель, порожденных склейкой его сторон номер $1, 2, 5, 6, \dots, 4g-3, 4g-2$ (остальные стороны склеены с этими). Докажите, что в $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1$, где $[x, y] \stackrel{\text{def}}{=} xyx^{-1}y^{-1}$. д) Докажите, что существуют элементы $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \in \pi_1(E_g)$ такие, что $p_*(\alpha_i) = a_i$ и $p_*(\beta_i) = b_i$ при всех $i = 1, \dots, g$, и что для любых таких элементов выполнено соотношение $[\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_g, \beta_g] = u^{2-2g}$.