6. КОМПЛЕКСЫ: ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА.

Задача 1. Пусть $\xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$ — комплекс абелевых групп, в котором $C_i = \mathbb{Z}^{k_i}$ для всех i, а $\xrightarrow{\partial_{i+1}} \tilde{C}_i \xrightarrow{\partial_i} \tilde{C}_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} \tilde{C}_0 \longrightarrow 0$ комплекс векторных пространств, в котором $\tilde{C}_i = \mathbb{R}^{k_i}$ для всех i, а дифференциалы те же самые (задаются теми же матрицами в стандартных базисах). Докажите, что если $H_i(C) = \mathbb{Z}^{\beta_i} \oplus G_i$, где G_i — конечная абелева группа (кручение), то $H_i(\tilde{C}) = \mathbb{R}^{\beta_i}$.

Задача 2. Докажите, что первые когомологии произвольного коцепного комплекса $\longleftarrow C_2 \longleftarrow C_1 \longleftarrow C_0 \longleftarrow 0$, где $C_i = \mathbb{Z}^{k_i}$ для всех i, свободны (не содержат элементов конечного порядка).

Задача 3. Пусть $\xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$ —цепной комплекс, где для всех i группа $C_i = \mathbb{Z}^{k_i}$. Рассмотрим последовательность $\xleftarrow{\partial_{i+1}^*} C_i \xleftarrow{\partial_i^*} C_{i-1} \xleftarrow{\partial_{i-1}^*} \cdots \xleftarrow{\partial_1^*} C_0 \longleftarrow 0$, в которой гомоморфизм ∂_i^* сопряжен гомоморфизму ∂_i (их матрицы в стандартных базисах в $\mathbb{Z}^{k_i}$ отличаются транспонированием). а) Докажите, что вторая последовательность также является комплексом (он называется коцепным комплексом, двойственным к исходному). б) Докажите, что если $H_i(C) = \mathbb{Z}^{\beta_i} \oplus G_i$, где G_i — конечная абелева группа, то гомологии двойственного комплекса $H^i(C) = \mathbb{Z}^{\beta_i} \oplus G_i'$, где группа G_i' также конечна. Приведите пример, показывающий, что группы G_i и G_i' могут не совпадать.

Задача 4 (5-лемма)**.** Дана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{i} & E \\
p\downarrow & & q\downarrow & & r\downarrow & & s\downarrow & & t\downarrow \\
A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{i'} & E'
\end{array}$$

(коммутативность означает, что имеют место равенства $q \circ f = f' \circ p$ и т.п.). В этой диаграмме строки — точные последовательности, q и s — изоморфизмы, p — эпиморфизм, t — мономорфизм. Докажите, что r — изоморфизм.

Пусть A, B, C — комплексы, и имеется набор гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial_{A,i+2}} & A_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{A,i+1}} & A_i & \xrightarrow{\partial_{A,i}} & A_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{A,i-1}} & \dots \\
 & & \alpha_{i+1}\downarrow & & \alpha_i\downarrow & & \alpha_{i-1}\downarrow & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial_{B,i+2}} & B_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{B,i+1}} & B_i & \xrightarrow{\partial_{B,i}} & B_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{B,i-1}} & \dots, \\
 & & \beta_{i+1}\downarrow & & \beta_i\downarrow & & \beta_{i-1}\downarrow & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial_{C,i+2}} & C_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{C,i+1}} & C_i & \xrightarrow{\partial_{C,i}} & C_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{C,i-1}} & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

в котором все столбцы — точные последовательности, и все квадраты коммутативны (т.е. имеют место равенства $\alpha_{i-1} \circ \partial_{A,i} = \partial_{B,i} \circ \alpha_i$ и т.п.).

Задача 5. а) Пусть $\partial_{A,i}(x) = 0$; докажите, что $\partial_{B,i}(\alpha_i(x)) = 0$. Также докажите, что если $x = \partial_{A,i+1}(y)$, то $\alpha_i(x) = \partial_{B,i+1}(z)$ для некоторого z. б) Из задачи 5а следует, что определен гомоморфизм $(\alpha_i)_* : H_i(A) \to H_i(B)$. Определим аналогичным образом гомоморфизм $(\beta_i)_* : H_i(B) \to H_i(C)$. Докажите, что $\mathrm{Im}((\alpha_i)_*) = \mathrm{Ker}((\beta_i)_*)$ (то есть последовательность отображений $H_i(A) \xrightarrow{(\alpha_i)_*} H_i(B) \xrightarrow{(\beta_i)_*} H_i(C)$ точна). в) Пусть $\partial_{C,i}(x) = 0$. Докажите, что существует $y \in B_i$ такой, что $\beta_i(y) = x$, и что для всякого такого y существует и единствен $z \in A_{i-1}$ такой, что $\alpha_{i-1}(z) = \partial_{B,i}(y)$. г) Докажите, что $\partial_{A,i-1}(z) = 0$, где элемент z построен в задаче 5в. д) Пусть $y_1, y_2 \in B_i$ таковы, что $\beta_i(y_1) = \beta_i(y_2) = x$, и $z_1, z_2 \in A_{i-1}$ — элементы, построенные по y_1 и y_2 в задаче 5в. Докажите, что существует $u \in A_i$ такой, что $z_1 - z_2 = \partial_{A,i}(u)$. е) Пусть $x = \partial_{C,i+1}(v)$ для некоторого $v \in C_{i+1}$, и пусть $z \in A_{i-1}$ — элемент, построеный по x в задаче 5в. Докажите, что $z = \partial_{A,i}(u)$ для некоторого $u \in A_i$. ж) Из задач 5в–5е вытекает, что соответствие $x \mapsto z$ корректно определяет гомоморфизм $\delta : H_i(C) \to H_{i-1}(A)$. Докажите, что последовательность $H_i(B) \xrightarrow{(\beta_i)_*} H_i(C) \xrightarrow{\delta_i} H_{i-1}(A) \xrightarrow{(\alpha_i)_*} H_{i-1}(B)$ точна (и, тем самым, склеивается с последовательностью задачи 5б в “длинную точную последовательность” гомологий).