7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГОМОЛОГИЙ.

Задача 1. В приведенных ниже примерах вычислите гомологии симплициального комплекса (с целыми коэффициентами) связанного с заданным симплициальным разбиением: а) разбиение окружности на 3 дуги; б) разбиение двумерной сферы на грани тетраэдра; в) то же самое, n-мерной сферы.

Задача 2. Для перечисленных ниже топологических пространств предъявите симплициальное разбиение и вычислите гомологии соответствующего симплициального комплекса с целыми коэффициентами, рациональными коэффициентами и коэффициентами в $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, для произвольного k: а) букет n окружностей; б) n-мерный шар; в) кольцо (круг с дыркой); г) круг с двумя дырками; д) $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$; е) лента Мебиуса (с границей); ж) $\mathbb{R}P^2$; з) двумерная сфера, два полюса которой отождествлены; пространство орбит действия группы $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ на трехмерной сфере $\{(z, w) \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$: элемент $1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ переводит (z, w) в $(\zeta z, \zeta w)$, где $\zeta = (1 + i\sqrt{3})/2$ — кубический корень из 1.

Задача 3. Пусть $X = T_n \times [0, 1]$ — $(n+1)$-мерная призма (произведение n-мерного симплекса T_n на отрезок), $A_0 \dots A_n$ — вершины нижнего основания, $B_0 \dots B_n$ — соответствующие вершины верхнего основания. Докажите, что $(n+1)$-мерные сиплексы $A_0 \dots A_n B_0$, $A_1 \dots A_n B_0 B_1$, …, $A_n B_0 \dots B_n$ образуют симплициальное разбиение X а) при $n = 1$ и $n = 2$ (и нарисуйте эти разбиения), б) при произвольном n.

Задача 4. а) Пусть X — пространство с одномерным симплициальным разбиением, $Y = X \times [0, 1]$. Для каждого симплекса T_i разбиения X триангулируем $T_i \times [0, 1]$ так, как указано в задаче 3. Докажите, что получается триангуляция пространства Y и что $H_2(Y) = 0$, $H_1(Y) = H_1(X)$, $H_0(Y) = H_0(X)$. б) Аналогичный вопрос для двумерного симплициального разбиения X. в) Аналогичный вопрос для произвольного симплициального разбиения X.

Пусть X — пространство с симплициальным разбиением, $X = A \cup B$, причем разбиение X одновременно определяет симплициальное разбиение A, B и $A \cap B$. Рассмотрим последовательность симплициальных комплексов $0 \longrightarrow C_\cdot(A \cap B) \xrightarrow{(\iota,-\iota)} C_\cdot(A) \oplus C_\cdot(B) \xrightarrow{p} C_\cdot(A \cup B) \longrightarrow 0$, где ι сопоставляет симплексу в $A \cap B$ его же, но как элемент симплициального разбиения в A или B, а p сопоставляет паре симплексов в A и B их сумму как элементов симплициального разбиения $X = A \cup B$. Эта последовательность, очевидно, точная. Тогда ей, согласно задаче 5 листка 6, соответствует точная последовательность гомологий $\dots \to H_i(A \cap B) \to H_i(A) \oplus H_i(B) \to H_i(A \cup B) \to H_{i-1}(A \cap B) \to \dots \to H_0(A \cap B) \to 0$, называемая последовательностью Майера–Виеториса.

Задача 5. а) Пусть $X = S^2$, A — северное полушарие, B — южное. Пользуясь последовательностью Майера–Виеториса и результатами задачи 2, вычислите $H_k(S^2)$ при всех k. б) Вычислите аналогичным образом гомологии сферы произвольной размерности. Сравните проведенное вычисление с задачей 1в. в) Пусть Y — произвольное триангулированное пространство, $X = \Sigma Y$ (надстройка над Y). Пользуясь последовательностью Майера–Виеториса, выразите гомологии X через гомологии Y.

Задача 6. а) Двумерный тор X это объединение двух цилиндров A и B, пересекающихся по обоим основаниям. Вычислите в данной ситуации последовательность Майера–Виеториса. б) Бутылка Клейна K также получается склеиванием двух цилиндров по основаниям, но одно из оснований приклеивается с перекруткой. Выпишите последовательность Майера–Виеториса и докажите, что $H_2(K) = 0$. Можно ли вычислить $H_1(K)$, исходя из этой последовательности?

Задача 7. Пусть $X = S^3$, $K \subset X$ — гладкая замкнутая несамопересекающаяся кривая (узел), $A \subset X$ — тонкая трубка вокруг K (гомеоморфная полноторию), $B \subset X$ — замыкание $X \setminus A$. Вычислите последовательность Майера–Виеториса для разбиения $X = A \cup B$ в случае, когда а) K — незаузленная окружность; б) K — узел "трилистник".

Указание. В задаче 7а представьте S^3 как $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, а K — как $\ell \cup \{\infty\}$, где $\ell \subset \mathbb{R}^3$ — прямая.