Тензоры

A1◇1. Верно ли, что среди векторов $v_i \in V_i$ тогда и только тогда есть нулевой, когда любое полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ зануляется на этом наборе векторов?

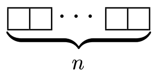
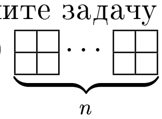
A1◇2. Постройте канонический изоморфизм $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U,V)$ и покажите, что оператор $f : U \longrightarrow V$ тогда и только тогда отвечает разложимому тензору $\xi \otimes v$, когда $\mathrm{rk}\, f = 1$.

A1◇3. В условиях зад. A1◇2 запишем операторы $U \xrightarrow{A} V$ и $V \xrightarrow{B} W$ в виде $A = \sum \alpha_\nu \otimes a_\nu$, $B = \sum \beta_\mu \otimes b_\mu$ с $\alpha_\nu \in U^*$, $a_\nu \in V$, $\beta_\mu \in V^*$, $b_\mu \in W$. Запишите аналогичным образом произведение $BA \in \mathrm{Hom}(U,W) \simeq U^* \otimes W$.

A1◇4. Пусть $e_i \in V$ и $x_i \in V^*$ — двойственные базисы. В какой оператор переходит при изоморфизме из зад. A1◇2 *тензор Казимира* $\sum x_i \otimes e_i \in V^* \otimes V$?

A1◇5. Отображение $\mathrm{Hom}(V,V) \simeq V^* \otimes V \xrightarrow{\tau} (V \otimes V^*)^* \simeq \mathrm{Hom}(V,V)^*$, переводящее $\xi \otimes v$ в линейную форму, значение которой на $v' \otimes \xi'$ равно $\xi(v') \cdot \xi'(v)$, задаёт на пространстве $\mathrm{Hom}(V,V)$ корреляцию. Какой билинейной форме на $\mathrm{Hom}(V,V)$ она отвечает? Вырождена ли эта форма? Симметрична ли? Как она записывается в терминах матриц? Что за квадратичная форма ей соответствует?

A1◇6. Как связана матрица тензорного произведения двух операторов с матрицами самих операторов? Пусть F — вложение, а $E \neq 0$ — тождественный оператор. Верно ли, что $F \otimes E$ — вложение?

A1◇7. Опишите цикловой тип тензорного квадрата нильпотентного оператора в терминах диаграммы Юнга самого оператора. Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для операторов циклового типа **а)**  **б)**  **в)** 

A1◇8. Пусть операторы f и g диагонализуемы с собственными значениями $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d\}$ и $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d\}$ (все числа λ_i и μ_j попарно различны). Найдите все собственные значения $f \otimes g$ и их кратности.

A1◇9. Постройте для конечномерных пространств U, V, W канонические изоморфизмы
а) $U^* \otimes V^* \simeq (U \otimes V)^*$ **б)** $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(U,V),W) \simeq \mathrm{Hom}(V, U \otimes W)$

A1◇10. Найдите размерность пространства билинейных форм $\varphi : V \times V \longrightarrow \Bbbk$, удовлетворяющих $\forall\, u,v \in V$ условиям **а)** $\varphi(v,v) = 0$ **б)** $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$.

A1◇11. Постройте изоморфизм пространства n−линейных форм $V^* \times \cdots \times V^* \longrightarrow \Bbbk$
а) с пространством $V^{\otimes n}$ **б)** с пространством, двойственным к $V^{*\otimes n}$.

A1◇12. Найдите размерность пространства трилинейных форм $\varphi : V \times V \times V \longrightarrow \Bbbk$, удовлетворяющих $\forall\, u,v,w \in V$ условиям:
а) $\varphi(u,v,w) = \varphi(v,u,w) = \varphi(u,w,v)$ **б)** $\varphi(u,v,w) = \varphi(v,u,w)$
в) $\varphi(u,v,w) = \varphi(v,u,w) = \varphi(u,w,w)$ **г)** $\varphi(u,v,v) = \varphi(u,u,v) = 0$ **д*)** $\varphi(u,u,u) = 0$
е*) $\varphi(u,v,w) = \varphi(v,w,u)$ **ж*)** $\varphi(u,v,w) + \varphi(v,w,u) + \varphi(w,u,v) = 0$

A1◇13. Зафиксируем ненулевой $\xi \in V^*$. Назовём *внутренним умножением* на ξ оператор

$$i_\xi : V^{\otimes(n+1)} \longrightarrow V^{\otimes n},$$

двойственный оператору левого тензорного умножения $\mu_\xi : V^{*\otimes n} \xrightarrow{\tau \mapsto \xi \otimes \tau} V^{*\otimes(n+1)}$ при каноническом отождествлении $V^{\otimes n}$ с $\left(V^{*\otimes n}\right)^*$ из зад. A1◇11. Выясните, эпиморфен ли оператор внутреннего умножения, и явно опишите его действие на заданную n-линейную форму $w : V^* \times \cdots \times V^* \longrightarrow \Bbbk$