Тензорные степени

A2◇1. Имеются ли для любых модулей над любым коммутативным кольцом K с единицей изоморфизмы
а) $(M \oplus N) \otimes L = (M \otimes L) \oplus (N \otimes L)$ **б)** $\mathrm{Hom}(M \oplus N, L) = \mathrm{Hom}(M, L) \oplus \mathrm{Hom}(N, L)$
в) $\mathrm{Hom}(L, M \oplus N) = \mathrm{Hom}(L, M) \oplus \mathrm{Hom}(L, N)$ **г)** $\mathrm{Hom}(L \otimes M, N) = \mathrm{Hom}(L, \mathrm{Hom}(M \otimes N))$

A2◇2. Опишите абелеву группу[1]: **а)** $\mathbb{Z}/(3) \otimes \mathbb{Z}/(4)$ **б)** $\mathbb{Z}/(6) \otimes \mathbb{Z}/(4)$
в) $\mathbb{Z}/(m) \otimes \mathbb{Z}/(n)$, где $(m, n) = (1)$ **г)** $\mathbb{Z}/(p^m) \otimes \mathbb{Z}/(p^n)$, где p — простое.

A2◇3. Опишите абелеву группу: **а)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/(6), \mathbb{Z}/(5))$ **б)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/(6), \mathbb{Z}/(10)$
в) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/(m), \mathbb{Z}/(n)$, где $(m, n) = (1)$ **г)** $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/(p^m), \mathbb{Z}/(p^n)$, где p — простое
д) $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}/(30))$ **е)** $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z})$ **ж)** $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}/(p^n))$, где p — простое

Обозначения. Через S^nV и Λ^nV обозначаются симметрическая и внешняя степени пространства V, которые являются *фактор пространствами* тензорной степени $V^{\otimes n}$ по соотношениям коммутирования и антикоммутирования соответственно. Через $\mathrm{Sym}^n(V), \mathrm{Skew}^n(V) \subset V^{\otimes n}$ обозначаются *подпространства* тензорной степени, состоящие из симметрических и кососимметрических тензоров соответственно.

A2◇4. Для любого ли векторного пространства V над полем нулевой характеристики имеются изоморфизмы **а)** $V^{\otimes 2} \simeq \mathrm{Sym}^2V \oplus \mathrm{Skew}^2V$ **б)** $V^{\otimes 3} \simeq \mathrm{Sym}^3V \oplus \mathrm{Skew}^3V$? Если да, то постройте их явно. Если нет, объясните, почему, и явно предъявите тензор, не являющийся суммой кососимметричного им симметричного.

A2◇5. Верно ли, что $V^{*\otimes 3}$ линейно порождается Sym^3V^*, Skew^3V^* и пространством трилинейных форм на V, удовлетворяющих *тождеству Якоби* из зад. 1.12 (ж)?

A2◇6. Над полем характеристики нуль постройте канонические изоморфизмы между пространствами: **а)** симметричных n-линейных форм $V \times V \times \cdots \times V \xrightarrow{\varphi} \Bbbk$
б) функций $V \xrightarrow{f} \Bbbk$, задаваемых однородным многочленом степени n от линейных координат относительно какого-нибудь базиса
в) $\mathrm{Sym}^n(V^*)$ **г)** $\mathrm{Sym}^n(V)^*$ **д)** $(S^nV)^*$ **е)** (S^nV^*)
Какие из них остаются изоморфизмами над всеми полями конечной характеристики?

A2◇7. Над полем характеристики нуль постройте канонические изоморфизмы между пространствами: **а)** кососимметричных n-линейных форм $V \times V \times \cdots \times V \xrightarrow{\varphi} \Bbbk$
б) $\mathrm{Skew}^n(V^*)$ **в)** $\mathrm{Skew}^n(V)^*$ **г)** $(\Lambda^nV)^*$ **д)** (Λ^nV^*)
Какие из них остаются изоморфизмами над всеми полями конечной характеристики?

A2◇8. Пусть оператор $F : V \longrightarrow V$ диагонализуем с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Покажите, что $F^{\otimes n} : V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n}$ диагонализуем и переводит в себя Sym^nV и Skew^nV. Вычислите его собственные значения на всех трёх пространствах.

A2◇9. Пусть в условиях предыдущей задачи известны все коэффициенты характеристического многочлена оператора F. Выразите через них **а)** $\mathrm{tr}\,F^{\otimes 2}$ **б)** $\mathrm{tr}\,F^{\otimes 3}$ **в)** $\det F^{\otimes 2}$ **г)** $\det F^{\otimes 3}$
д) след и определитель действия F на пространстве $\mathrm{Hom}(V, V)$ сопряжением: $G \mapsto FGF^{-1}$
е) след и определитель действия F на пространстве квадратичных форм на V по правилу $F\varphi(x) = \varphi\,(F^{-1}x)$.

A2◇10. Изменятся ли ответы в зад. A2◇9, если F не диагонализуем?

A2◇11. Верно ли, что $e^{F \otimes E + E \otimes F} = e^F \otimes e^F$?

A2◇12*. Справедливо ли для $n \times n$ матрицы A равенство $\ln\det(E - A) = \mathrm{tr}\,\ln(E - A)$
а) в кольце формальных степенных рядов от матричных элементов
б) численно, для всех достаточно малых комплексных A

[1] укажите каноническое представление в виде прямой суммы циклических групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/(p^m)$