# Математический анализ — II

## Листок 2

1) Существует ли в категории групп
   а) универсальный отталкивающий объект?
   б) универсальный притягивающий объект?
2) Пусть $A_\alpha$ — произвольное семейство объектов некоторой категории $\mathcal{C}$. Рассмотрим категорию $\tilde{\mathcal{C}}$, объекты которой — всевозможные семейства морфизмов $\varphi_\alpha : A_\alpha \to B$, где $B$ — один и тот же объект категории $\mathcal{C}$ (свой для каждого объекта категории $\tilde{\mathcal{C}}$), а морфизмы категории $\tilde{\mathcal{C}}$ из объекта $(\varphi_\alpha : A_\alpha \to B)$ в объект $(\varphi'_\alpha : A_\alpha \to B')$ — это такие морфизмы $\chi$ категории $\mathcal{C}$ из $B$ в $B'$, что все диаграммы

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi_\alpha"'] & A_\alpha \arrow[d, "\varphi'_\alpha"] \\ B \arrow[r, "\chi"] & B' \end{tikzcd}$$

   коммутативны (то есть $\varphi'_\alpha = \chi \circ \varphi_\alpha$ для любого $\alpha$). Если в категории $\tilde{\mathcal{C}}$ существует универсальный отталкивающий объект $(i_\alpha : A_\alpha \to S)$, то $S$ называется *суммой* семейства объектов $A_\alpha$, а морфизмы $i_\alpha$ называются *каноническими вложениями* слагаемых в сумму.
   а) Докажите, что в категории множеств существует сумма двух объектов.
   б) Докажите, что в категории множеств существует сумма любого семейства объектов.
   в) Докажите, что в категории конечномерных векторных пространств над данным полем существует сумма любого конечного семейства объектов.
   г) Для каких бесконечных семейств объектов существуют суммы в категории конечномерных векторных пространств над данным полем?
   д) Докажите, что в категории всех векторных пространств над данным полем существует сумма любого семейства объектов.
   е) Докажите, что в категории топологических пространств существует сумма двух объектов.
   ж) Докажите, что в категории топологических пространств существует сумма любого семейства объектов.
3) Пусть $A_\alpha$ — произвольное семейство объектов некоторой категории $\mathcal{C}$. Рассмотрим категорию $\tilde{\mathcal{C}}$, объекты которой — всевозможные семейства морфизмов $\varphi_\alpha : B \to A_\alpha$, где $B$ — один и тот же объект категории $\mathcal{C}$, а морфизмы категории $\tilde{\mathcal{C}}$ из объекта $(\varphi_\alpha : B \to A_\alpha)$ в объект $(\varphi'_\alpha : B' \to A_\alpha)$ — это такие морфизмы $\chi$ категории $\mathcal{C}$ из $B$ в $B'$, что все диаграммы

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\varphi_\alpha"'] & B' \arrow[d, "\varphi'_\alpha"] \\ A_\alpha \arrow[r, equal] & A_\alpha \end{tikzcd}$$

   коммутативны. Если в категории $\tilde{\mathcal{C}}$ существует универсальный притягивающий объект $(p_\alpha : P \to A_\alpha)$, то $P$ называется *произведением* семейства объектов $A_\alpha$, а морфизмы $p_\alpha$ называются *каноническими проекциями* произведения на сомножители.
   а) Докажите, что в категории множеств существует произведение двух объектов.
   б) Докажите, что в категории множеств существует произведение любого семейства объектов.
   в) Докажите, что в категории конечномерных векторных пространств над данным полем существует произведение любого конечного семейства объектов.
   г) Для каких бесконечных семейств объектов существуют произведения в категории конечномерных векторных пространств над данным полем?
   д) Докажите, что в категории всех векторных пространств над данным полем существует произведение любого семейства объектов.
   е) Докажите, что в категории топологических пространств существует произведение двух объектов.
   ж) Докажите, что в категории топологических пространств существует произведение любого семейства объектов.

4) Пусть $X$ — подмножество топологического пространства $Y$. Докажите, что замыкание $X$ не имеет внутренних точек тогда и только тогда, когда каждое непустое открытое подмножество $U \subseteq Y$ имеет непустое открытое подмножество $V \subseteq U$ такое, что $V \cap X = \varnothing$. Такие подмножества $X \subset Y$ называются *нигде не плотными*.
5) Покажите, что множество чисел из отрезка $[0;1]$, в десятичной записи которых не встречается последовательность 142857, является нигде не плотным. (Десятичные записи с бесконечным хвостом девяток запрещены.)
6) Докажите, что полное метрическое пространство нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств («теорема Бэра»).
7) Можно ли множество иррациональных чисел представить в виде объединения счетного семейства замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}$?

Всюду дальше через $\mathbb{Z}_p$ обозначается кольцо целых $p$-адических чисел.

8) Пусть $p > 2$ и $u \in \mathbb{Z}_p$ не делится на $p$. Покажите, что $u$ является в $\mathbb{Z}_p$ полным квадратом (т. е. существует $x \in \mathbb{Z}_p$, для которого $x^2 = u$) тогда и только тогда, когда $u$ сравнимо по модулю $p$ с квадратом целого числа (т. е. существует $m \in \mathbb{N}$, для которого $m^2 - u$ делится на $p$).
9) Выясните, какие элементы в $\mathbb{Z}_2$ являются полными квадратами.
10) Рассмотрим $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{R}$ как группы по сложению. Какие существуют гомоморфизмы из $\mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{R}$, являющиеся непрерывными отображениями?
11) Какие существуют непрерывные гомоморфизмы из $\mathbb{Z}_p$, рассматриваемого как группа по сложению, в окружность (т. е. группу комплексных чисел, равных единице по модулю, с умножением в качестве операции)?
12) Пусть $X$ — канторово множество.
    а) Докажите, что $X$ гомеоморфно $X \times X$.
    б) Докажите, что $X$ гомеоморфно произведению счетного семейства, каждый член которого равен $X$.
13) а) Докажите, что отрезок не гомеоморфен квадрату.
    б) Докажите, что существует сюръективное непрерывное отображение отрезка на квадрат. (Указание: квадрат компактен и линейно связен.)
14) Существует ли непрерывная функция $f : [0,1] \to [0,1]$ такая, что для любого $a \in [0,1]$ множество решений уравнения $f(x) = a$ имеет мощность континуум?
15) Докажите, что множество иррациональных чисел (с топологией, унаследованной из $\mathbb{R}$) гомеоморфно произведению счетного семейства счетных дискретных множеств.
16) * Докажите, что любое компактное вполне несвязное совершенное метрическое пространство гомеоморфно канторову множеству.