# Математический анализ — II

## Листок 1

1) Рассмотрим множество кругов на плоскости, содержащихся в данном квадрате, и упорядочим его по включению.
   а) Есть ли в этом множестве наибольший элемент?
   б) Применима ли к этому множеству лемма Цорна?
   в) Опишите все максимальные элементы в этом множестве.
2) Докажите, что в любом векторном пространстве есть базис.
3) Выведите из леммы Цорна **теорему Цермело**:
   *Всякое множество можно вполне упорядочить.*
4) Используя теорему Цермело, докажите, что из любых двух множеств одно равномощно подмножеству другого.
5) Выведите из теоремы Цермело лемму Цорна.
6) Докажите, что поле комплексных чисел изоморфно алгебраическому замыканию поля рациональных функций с рациональными коэффициентами от континуального семейства алгебраически независимых переменных.
7) Пусть $Y$ — полное метрическое пространство и $X \subset Y$. Докажите, что замыкание $X$ в $Y$ является пополнением метрического пространства $X$.
8) Докажите неполноту и постройте пополнения следующих метрических пространств:
   а) прямой $\mathbb{R}$ с расстоянием $d(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;
   б) прямой $\mathbb{R}$ с расстоянием $d(x,y) = |e^x - e^y|$.
9) Во множестве $\{\Delta\}$ отрезков на прямой определим расстояние как длину симметрической разности:
   $$d(\Delta_1, \Delta_2) = |\Delta_1| + |\Delta_2| - 2|\Delta_1 \cap \Delta_2|$$
   (через $|\Delta|$ обозначена длина отрезка $\Delta$). Докажите неполноту и найдите пополнение этого метрического пространства.
10) Докажите неполноту пространства многочленов относительно метрик:
    а) $d(P,Q) = \max\limits_{x\in[0,1]} |P(x) - Q(x)|$;
    б) $d(P,Q) = \int\limits_0^1 |P(x) - Q(x)|dx$;
    в) $d(P,Q) = \sum\limits_i |c_i|$, где $P(x) - Q(x) = \sum\limits_i c_i x^i$.
11) Докажите полноту пространства $B(X)$ ограниченных функций на множестве $X$ с расстоянием
    $$d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$
12) Пусть $X$ — ограниченное метрическое пространство. Докажите, что отображение $x \mapsto d(x, \bullet)$ является изометрическим вложением $X$ в $B(X)$.
13) Выведите из предыдущих двух задач теорему о существовании пополнения для ограниченных метрических пространств.
14) Докажите, что в любом полном метрическом пространстве выполнена **теорема о стягивающихся шарах**:
    *У любой последовательности вложенных замкнутых шаров $B_1(a_1, r_1) \supseteq B_2(a_2, r_2) \supseteq \ldots$, радиусы которых стремятся к нулю, есть единственная общая точка.*
15) Докажите, что любое метрическое пространство, в котором выполнена теорема о стягивающихся шарах, является полным.
16) Докажите, что всякая равномерно непрерывная функция на метрическом пространстве $X$ однозначно продолжается до непрерывной функции на его пополнении, и это продолжение равномерно непрерывно.