§1. Тензорная алгебра.

1.1. Полилинейные отображения. Рассмотрим векторные пространства $V_1, V_2, \dots, V_n$ и W размерностей $d_1, d_2, \dots, d_n$ и m над произвольным полем $\Bbbk$. Отображение

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W \tag{1-1}$$

называется *полилинейным*, если оно линейно по каждому своему аргументу при произвольно зафиксированных остальных:

$$\varphi(\dots, \lambda v' + \mu v'', \dots) = \lambda\, \varphi(\dots, v', \dots) + \mu\, \varphi(\dots, v'', \dots)\,.$$

Если выбрать в каждом пространстве V_i некоторый базис $e^{(i)}_1, e^{(i)}_2, \dots, e^{(i)}_{d_i}$, то полилинейное отображение φ будет однозначно определяется своими значениями

$$\varphi\big(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, e^{(n)}_{\alpha_n}\big) \in W \tag{1-2}$$

на всевозможных сочетаниях базисных векторов, поскольку для произвольного набора векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$, которые раскладываются по выбранным базисам как

$$v_i = \sum_{\alpha_i=1}^{d_i} x^{(i)}_{\alpha_i}\, e^{(i)}_{\alpha_i}\,,$$

в следствие полилинейности отображения φ выполняется равенство

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} x^{(1)}_{\alpha_1} \cdot x^{(2)}_{\alpha_2} \cdot \,\cdots\, \cdot x^{(n)}_{\alpha_n} \cdot \varphi\big(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, e^{(n)}_{\alpha_n}\big)\,. \tag{1-3}$$

Таким образом, если зафиксировать и в пространстве W какой-либо базис $e_1, e_2, \dots, e_m$ и разложить векторы (1-2) по этому базису:

$$\varphi\big(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, e^{(n)}_{\alpha_n}\big) = \sum_{\nu=1}^{m} a^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_{\nu} \cdot e^{\nu}\,,$$

то полилинейное отображение φ будет однозначно описываться набором из $d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_n \cdot m$ чисел $a^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_{\nu} \in \Bbbk$, которые при желании могут рассматриваться как элементы некой матрицы $(n+1)$-мерного формата[1] $d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_n \times m$, и формула (1-3) переписывается через эти матричные элементы как

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\nu, \alpha_1, \dots, \alpha_n} a^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}_{\nu} \cdot x^{(1)}_{\alpha_1} \cdot x^{(2)}_{\alpha_2} \cdot \,\cdots\, \cdot x^{(n)}_{\alpha_n} \cdot e_\nu\,.$$

Упражнение 1.1. *Покажите, что полилинейные отображения (1-1) образуют векторное пространство размерности $d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_n \cdot m$.*

Мы будем обозначать это векторное пространство через $\mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$.

1.2. Тензорное произведение векторных пространств. Рассмотрим какое-нибудь полилинейное отображение

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau} U\,. \tag{1-4}$$

[1] обычные матрицы, дающие *линейные* отображения $V \longrightarrow W$, имеют в этом смысле 2-мерный формат $d \times m$, где $d = \dim V$, $m = \dim W$

Взятие композиции этого отображения со всевозможными линейными операторами $U \xrightarrow{F} W$ задаёт *линейный оператор*

$$\mathrm{Hom}(U, W) \xrightarrow{F \mapsto F \circ \tau} \mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) \tag{1-5}$$

из пространства $\mathrm{Hom}(U, W)$ линейных операторов $U \xrightarrow{F} W$ в пространство полилинейных отображений $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$.

Полилинейное отображение (1-4) называется *универсальным*, если линейный оператор (1-5) является изоморфизмом *для всех* пространств W.

Иначе говоря, полилинейное отображение τ универсально, если для любого пространства W и любого полилинейного отображения $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ существует единственный линейный оператор $U \xrightarrow{F} W$ такой, что $\varphi = F \circ \tau$, т. е. пара сплошных стрелок в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dd, dashed, "F"] \\
V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
& W
\end{tikzcd}$$

всегда замыкается в коммутативный треугольник *единственным* пунктирным *линейным* отображением.

1.2.1. ЛЕММА. *Любые два универсальных полилинейных отображения*

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau_1} U_1 \quad \text{и} \quad V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau_2} U_2$$

канонически отождествляются при помощи единственного линейного изоморфизма $U_1 \xrightarrow{\iota} U_2$ *такого, что* $\tau_2 = \iota\tau_1$.

Доказательство. Поскольку и U_1, и U_2 оба универсальны, существуют единственные линейные операторы $U_1 \xrightarrow{F_{21}} U_2$ и $U_2 \xrightarrow{F_{12}} U_1$, которые встраиваются в коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"] & & U_1 \arrow[dd, dashed, "F_{21}"] \\
& V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[ul, "\tau_1"'] \arrow[ur, "\tau_1"] \arrow[dl, "\tau_2"] \arrow[dr, "\tau_2"'] & \\
U_2 \arrow[uu, dashed, "F_{12}"] \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"'] & & U_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"'] \arrow[dr, dotted, "F_{21}"] & & & & U_2 \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"] \arrow[dl, dotted, "F_{12}"'] \\
& U_2 \arrow[dl, dotted, "F_{12}"] & V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[l, "\tau_2"'] \arrow[ull, "\tau_1"'] \arrow[dll, "\tau_1"] \arrow[urr, "\tau_2"] \arrow[drr, "\tau_2"'] \arrow[r, "\tau_1"] & U_1 \arrow[dr, dotted, "F_{21}"] & \\
U_1 & & & & U_2
\end{tikzcd}$$

Обе композиции $F_{21}F_{12} = \mathrm{Id}_{U_2}$, $F_{12}F_{21} = \mathrm{Id}_{U_1}$, поскольку представления самих универсальных полилинейных отображений в виде $\tau_1 = \varphi \circ \tau_1$ и $\tau_2 = \psi \circ \tau_2$ в силу единственности таковых представлений возможны только с $\varphi = \mathrm{Id}_{U_1}$, $\psi = \mathrm{Id}_{U_2}$. □

1.2.2. ЛЕММА. *Пусть векторы* $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}$ *образуют базис пространства* V_i. *Обозначим через* $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ *векторное пространство размерности* $\prod d_i$, *базисом которого являются всевозможные символы*

$$e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}\,, \quad 1 \leqslant \alpha_i \leqslant d_i \tag{1-6}$$

Тогда полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$, *переводящее набор базисных векторов* $\left(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)}\right) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ *в соответствующий базисный символ* (1-6), *является универсальным.*

Доказательство. Для любых полилинейного $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ и линейного $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \xrightarrow{F} W$ равенство. $\varphi = F \circ \tau$ означает, что $F(e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes e^{(2)}_{\alpha_2} \otimes \ldots \otimes e^{(n)}_{\alpha_n}) = \varphi(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \ldots, e^{(n)}_{\alpha_n})$ на каждом наборе базисных векторов. □

Векторное пространство $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ называется *тензорным произведением* пространств V_ν, а универсальное полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ называется *тензорным умножением* векторов.

Значение $\tau(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ на произвольном наборе векторов записывается как $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$ и называется *разложимым тензором.*

Согласно лемме n° 1.2.2, линейная оболочка множества разложимых тензоров совпадает со всем пространством $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$. Однако само множество разложимых тензоров векторным пространством, как правило, *не является*[2] и образует внутри $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ некое нелинейное подмногообразие, проективизация которого называется *многообразием Сегре*.

На проективно-геометрическом языке, тензорное произведение векторов задаёт *вложение Сегре*

$$\mathbb{P}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_{m_n} = \mathbb{P}(V_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_n) \xhookrightarrow{s} \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n) = \mathbb{P}_N ,$$

где $m_i = \dim V_i - 1$, $N = \prod(m_i + 1) - 1$. Его образ — многообразие Сегре — состоит из классов пропорциональности разложимых тензоров. Он не содержится ни в какой гиперплоскости и заметается n семействами проективных подпространств размерностей $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Эта конструкция обобщает *квадрику Сегре* $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}_3$, обсуждавшуюся на первом курсе.

1.2.3. Пример: вложение Сегре $\mathbb{P}_{m_1} \times \mathbb{P}_{m_2} \hookrightarrow \mathbb{P}_{m_1+m_2+m_1m_2}$, по определению, переводит пару точек $x = (x_0 : x_1 : \ \ldots : x_{m_1}) \in \mathbb{P}_{m_1}$, $y = (y_0 : y_1 : \ \ldots : y_{m_2}) \in \mathbb{P}_{m_2}$ в точку, однородными координатами которой являются $(1 + m_1)(1 + m_2)$ всевозможных произведений $x_j y_i$. Их удобно организовать в матрицу ранга 1, которая является произведением столбца y на строку x

$$(a_{ij}) = (x_j y_i) = y^t \cdot x .$$

На геометрическом языке такое вложение Сегре отображает $\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(W)$ в $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V, W))$ и переводит пару $(\xi, w) \in V^* \times W$ в линейный оператор ранга один

$$\xi \otimes w : v \mapsto \xi(v) \cdot w ,$$

образом которого является 1-мерное подпространство, натянутое на вектор w, а ядром — подпространство $\mathrm{Ann}\,(\xi)$ коразмерности 1.

Упражнение 1.2. Проверьте, что отображение $V^* \times W \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, W)$, переводящее (ξ, w) в линейный оператор $v \longmapsto \xi(v) \cdot w$, является универсальным билинейным отображением и, тем самым, индуцирует канонический изоморфизм $V^* \otimes W \simeq \mathrm{Hom}(V, W)$.

Как мы видели в курсе линейной алгебры, любой оператор ранга 1 имеет вид $v \mapsto \xi(v)\, w$. Поэтому многообразие Сегре в этом случае представляет собой множество всех операторов ранга 1, рассматриваемых с точностью до пропорциональности. Если зафиксировать в V и W базисы, представить все операторы матрицами и использовать матричные элементы в качестве однородных координат на $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V, W))$, то многообразие Сегре будет задаваться в этих координатах набором квадратичных уравнений

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij} a_{\ell k} - a_{ik} a_{\ell j} = 0$$

зануляющих все 2×2 - миноры матрицы $(a_{\mu\nu})$.

1.3. Тензорная алгебра векторного пространства. Тензорное произведение векторного пространства V самого с собой $V^{\otimes n} \overset{\text{def}}{=} \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{n}$ называется *n-той тензорной степенью* пространства V. Все тензорные степени объединяются в бесконечномерную некоммутативную (но ассоциативную) градуированную алгебру

$$\mathsf{T}^\bullet V \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geqslant 0} V^{\otimes n}$$

[2]это связано с тем, что отображение τ *поли*линейно, но *не* линейно

(где при $n = 0$ мы полагаем $V^{\otimes 0} \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk$), которую можно неформально представлять себе как алгебру многочленов от *некоммутирующих* переменных $e_1, e_2, \dots, e_d$, составляющих базис пространства V. Базисом этой алгебры являются всевозможные некоммутативные мономы[3] $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_m}$, перемножение которых заключается в формальном приписывании их друг к другу через значок $\otimes$.

Упражнение 1.3. Используя универсальность, постройте канонические изоморфизмы[4]

$$\left(V^{\otimes n_1} \otimes V^{\otimes n_2}\right) \otimes V^{\otimes n_3} \simeq V^{\otimes n_1} \otimes \left(V^{\otimes n_2} \otimes V^{\otimes n_3}\right) \simeq V^{\otimes (n_1+n_2+n_3)} .$$

Формально, $\mathsf{T}^{\bullet}V$ является *свободной* ассоциативной $\Bbbk$-алгеброй, порожденной пространством V. По определению, это означает, что для любой ассоциативной $\Bbbk$-алгебры A и любого $\Bbbk$-линейного отображения $V \xrightarrow{f} A$ существует единственный гомоморфизм алгебр $\mathsf{T}^{\bullet}V \xrightarrow{\alpha} A$ такой, что $\alpha|_V = f$.

Упражнение 1.4. Следуя n° 1.2.1 покажите, что алгебра $\mathsf{T}^{\bullet}V$ (вместе с вложением $V \subset \mathsf{T}^{\bullet}V$) действительно обладает этим универсальным свойством, причём она определяется этим свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр (перестановочного с вложением $V \subset \mathsf{T}^{\bullet}V$).

1.4. Двойственность. Векторные пространства $V^{\otimes n}$ и $(V^*)^{\otimes n}$ канонически двойственны друг другу. Спаривание между тензорами $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ задается формулой

$$\langle\, v \,,\, \xi \,\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i) \tag{1-7}$$

и называется *полной сверткой*. Очевидно, что при этом любая пара двойственных базисов

$$e_1, e_2, \dots, e_n \subset V \;, \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \subset V^* \quad : \quad \xi_i(e_j) = \delta_{ij}$$

производит двойственные относительно полной свертки базисы из тензорных мономов

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \quad \text{и} \quad \xi_{j_1} \otimes \xi_{j_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{j_s} .$$

Итак, $(V^{\otimes n})^* \simeq (V^*)^{\otimes n}$. С другой стороны, универсальное свойство $V^{\otimes n}$ канонически отождествляет пространство $(V^{\otimes n})^*$ с пространством всех полилинейных форм

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \longrightarrow \Bbbk \,.$$

Поэтому имеется канонический изоморфизм пространства $(V^*)^{\otimes n}$ с пространством полилинейных форм от n аргументов на V, сопоставляющий каждому разложимому тензору

$$\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$$

полилинейную форму $(v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto \prod\limits_{i=1}^{n} \xi_i(v_i)$.

1.5. Частичные свертки. Рассмотрим два произвольных инъективных (не обязательно монотонных) отображения

$$\{1, 2, \dots, p\} \xleftarrow{\;I\;} \{1, 2, \dots, m\} \xrightarrow{\;J\;} \{1, 2, \dots, q\}$$

[3] по определению, *различные* для различных наборов индексов $(i_1, i_2, \dots, i_m)$

[4] которые, собственно, и превращают тензорное произведение векторов в корректное ассоциативное умножение на $\mathsf{T}^{\bullet}V$

и будем писать i_ν и j_ν вместо $I(\nu)$ и $J(\nu)$. Образы этих отображений суть упорядоченные (но не обязательно монотонные) наборы неповторяющихся индексов $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$, состоящие из одинакового числа элементов. Линейный оператор

$$\begin{gathered}\underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q} \xrightarrow{c^I_J} \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p-m} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q-m} \\ \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q \longmapsto \prod_{\nu=1}^{m} \xi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot (\bigotimes_{i \notin I} \xi_i) \otimes (\bigotimes_{j \notin J} v_j)\end{gathered} \tag{1-8}$$

называется *частичной сверткой* по индексам I и J.

1.5.1. Пример: свертка вектора с полилинейной формой. Полилинейную форму $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ можно интерпретировать как тензор из $V^{*\otimes n}$ и свернуть его по первому индексу с произвольным вектором $v \in V$. Результат лежит в $V^{*\otimes(n-1)}$ и, будучи рассмотрен как полилинейная форма от $(n-1)$ векторов, называется *внутренним произведением* v и φ и обозначается $i_v\varphi$ или $v \llcorner \varphi$.

Упражнение 1.5. Проверьте, что $i_v\varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$, т. е. внутреннее умножение на v есть не что иное, как фиксация v в качестве первого аргумента формы φ.

1.6. Линейный носитель тензора. Если выбрать в пространстве V базис, согласованный с парой подпространств $U, W \subset V$ и рассмотреть соответствующий мономиальный базис в тензорной алгебре $\mathsf{T}^\bullet V$, то мы увидим, что $(U \cap W)^{\otimes n} = U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ в $V^{\otimes n}$ при всех n. Из этого следует, что для любого $t \in V^{\otimes n}$ существует минимальное подпространство $\mathrm{Supp}(t) \subset V$, такое что $t \in W^{\otimes n}$ (достаточно пересечь все подпространства, обладающие этим свойством). Это минимальное подпространство называется *линейным носителем* тензора t. Неформально, оно аккумулирует все «неизвестные», от которых некоммутативный многочлен t эффективно зависит и которые нельзя «сократить» никакой линейной заменой переменных. Чтобы явно построить в $\mathrm{Supp}(t)$ систему порождающих векторов, свяжем с каждым инъективным (не обязательно монотонным) отображением $J = (j_1, j_2, \dots, j_{n-1}) : \{1, 2, \dots, (n-1)\} \hookrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ свёртку $V^{*\otimes(n-1)} \xrightarrow{c^J_t} V$, которая для всех $1 \leqslant \nu \leqslant (n-1)$ спаривает ν-й сомножитель каждого разложимого тензора $\varphi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_{n-1}$ с j_ν-м сомножителем t

$$c^J_t(\varphi) = c^{(1,2,\dots,(n-1))}_{(j_1,j_2,\dots,j_{n-1})}(\varphi \otimes t) \; . \tag{1-9}$$

1.6.1. ТЕОРЕМА. $\mathrm{Supp}(t) \subset V$ *порождён образами* $c^J_t\left(V^{*\otimes(n-1)}\right) \subset V$ *всех*[5] *свёрток* (1-9).

Доказательство. Пусть $\mathrm{Supp}(t) = W$. Ясно, что $t \in W^{\otimes n} \Rightarrow \mathrm{im}\,(c^J_t) \subset W$ для любой свёртки, так что достаточно доказать, что W аннулируется любой линейной формой $\xi \in V^*$, которая аннулирует все подпространства $\mathrm{im}\,(c^J_t)$. Предположим противное: пусть $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W, но аннулирует все $c^J_t\left(V^{*\otimes(n-1)}\right)$. Выберем в V^* такой базис $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$, чтобы $\xi_1 = \xi$, а ограничения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ на W составляли базис в W^*. Обозначим через $w_1, w_2, \dots, w_k$ двойственный к $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ базис в W. Зануление свёртки $\left\langle \xi_1 \, , \, c^J_t\left(\xi_{i1} \otimes \xi_{i2} \otimes \cdots \otimes \xi_{in-1}\right) \right\rangle$ для любых J и $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{in-1}$ означает, что полная свёртка t с любым базисным мономом пространства $W^{*\otimes n}$, содержащим ξ_1, обращается в нуль. Но согласно n° 1.4 такая свёртка равна коэффициенту при двойственном мономе в разложении t по $w_{i_1} \otimes w_{i_2} \otimes \cdots \otimes w_{i_n}$. Таким образом, в разложении t нет мономов, содержащих w_1, т. е. $\mathrm{Supp}(t)$ строго меньше, чем W. □

1.7. Условия (косо) симметричности. Полилинейное отображение

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \xrightarrow{\varphi} U \tag{1-10}$$

[5] т. е. берущихся по всем возможным J

называется *симметричным*, если при перестановках аргументов оно не изменяет своего значения, и *кососимметричным*, если оно принимает нулевое значение, когда какие-то два из аргументов совпадают. Беря композицию $F \longmapsto F\circ\varphi$ линейных операторов $U \xrightarrow{F} W$ с фиксированным (косо) симметричным отображением (1-10), мы получаем линейный оператор из пространства $\mathrm{Hom}(U,W)$ в пространство (косо) симметричных полилинейных форм $V^n \longrightarrow W$. (Косо)симметричное полилинейное отображение (1-10) называется *универсальным*, если этот оператор — изоморфизм для любого пространства W. Пространство – образ универсального симметричного полилинейного отображения обозначается через S^nV и называется n-той *симметричной степенью*, а кососимметричного — через Λ^nV и называется n-той *внешней степенью* пространства V.

Упражнение 1.6. Покажите, что S^nV и Λ^nV (если они существуют) единственны с точностью до единственного изоморфизма, коммутирующего с универсальным отображением.

Если положить $S^0V = \Lambda^0V \stackrel{\text{def}}{=} \Bbbk$, то на прямых суммах $S^\bullet V = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} S^nV$ и $\Lambda^\bullet V = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} \Lambda^nV$ можно ввести структуру градуированных[6] $\Bbbk$-алгебр. Технически удобнее, однако, сначала определить эти градуированные алгебры независимо, в терминах образующих и соотношений, а потом проверить, что умножения в этих алгебрах

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^nV & \longleftarrow & V_1\times V_2\times\cdots\times V_n & \longrightarrow & S^nV \\ v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_n & \leftarrow\!\shortmid & (v_1,v_2,\ldots,v_n) & \mapsto & v_1\cdot v_2\cdot\,\cdots\,\cdot v_n \end{array}$$

являются универсальными (косо) симметричными полилинейными отображениями.

1.7.1. Симметрическая алгебра $S^\bullet V$ пространства V есть фактор алгебра свободной ассоциативной алгебры $\mathsf{T}^\bullet V$ по соотношениям коммутативности $vw = wv$. Более точно, обозначим через $\mathscr{I}_{\text{sym}} \subset \mathsf{T}^\bullet V$ линейную оболочку всех разложимых тензоров вида

$$(\cdots\otimes v\otimes w\otimes\cdots) - (\cdots\otimes w\otimes v\otimes\cdots)\,,$$

где оба члена различаются только перестановкой v и w. Иначе $\mathscr{I}_{\text{sym}}$ можно описать как двусторонний идеал в $\mathsf{T}^\bullet V$, порожденный всеми разностями $v\otimes w - w\otimes v \in V\otimes V$. Фактор алгебра $S^\bullet V \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{T}^\bullet V/\mathscr{I}_{\text{sym}}$ называется *симметрической алгеброй* векторного пространства V, а индуцированное в ней умножение называется *симметрическим умножением* и обозначается точкой[7]. Поскольку $\mathscr{I}_{\text{sym}} = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0}(\mathscr{I}_{\text{sym}}\cap V^{\otimes n})$ является прямой суммой своих однородных компонент, симметрическая алгебра градуирована:

$$S^\bullet V = \bigoplus_{n\geqslant 0} S^nV\,,\quad \text{где}\quad S^nV \stackrel{\text{def}}{=} V^{\otimes n}/(\mathscr{I}_{\text{sym}}\cap V^{\otimes n})\,,$$

и если зафиксировать базис $e_1,e_2,\ldots,e_d \subset V$, то вся алгебра $S^\bullet V$ отождествится с алгеброй многочленов $\Bbbk[e_1,e_2,\ldots,e_d]$ от базисных векторов e_i, а пространство S^nV превратится в пространство однородных полиномов степени n.

Упражнение 1.7. Найдите $\dim S^nV$.

1.7.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Композиция тензорного умножения с факторизацией по* $\mathscr{I}_{\text{sym}}$*:*

$$\underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{n} \xrightarrow{\tau} V^{\otimes n} \xrightarrow{\pi} S^n(V) \tag{1-11}$$

является универсальной симметрической полилинейной формой.

[6]это означает, по определению, что операция умножения согласована с разложением в прямые суммы в том смысле, что произведение переводит $S^nV\times S^mV \longrightarrow S^{m+n}V$, $\Lambda^nV\times\Lambda^mV \longrightarrow \Lambda^{m+n}V$

[7]которую, впрочем, принято опускать

Доказательство. Любое полилинейное отображение $V \times V \times \cdots \times V \xrightarrow{\varphi} W$ единственным образом разлагается в композицию $\varphi = F \circ \tau$, где $V^{\otimes n} \xrightarrow{F} W$ линейно. При этом F пропускается через π тогда и только тогда, когда $F(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) = F(\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots)$, что равносильно тому что $\varphi(\ldots, v, w, \ldots) = \varphi(\ldots, w, v, \ldots)$. □

Упражнение 1.8. Убедитесь, что $S^\bullet V$ является *свободной коммутативной алгеброй*, порождённой векторным пространством V, т. е. для любой *коммутативной* $\Bbbk$-алгебры A и линейного отображения векторных пространств $V \xrightarrow{f} A$ существует единственный гомоморфизм алгебр $S^\bullet V \xrightarrow{\alpha} A$ такой, что $\alpha|_V = f$. Проверьте также, что $S^\bullet V$ (вместе с вложением $V \subset S^\bullet V$) определяется этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр (перестановочного с вложением $V \subset S^\bullet V$).

1.7.3. Внешняя алгебра $\Lambda^\bullet V$ пространства V является фактор алгеброй свободной ассоциативной алгебры $\mathsf{T}^\bullet V$ по соотношениям $v^2 = 0$, т. е. по двустороннему идеалу $\mathscr{I}_{\text{skew}} \subset \mathsf{T}^\bullet V$, порожденному всеми тензорами вида $v \otimes v \in V \otimes V$:

$$\Lambda^\bullet V \overset{\text{def}}{=} \mathsf{T}^\bullet V / \mathscr{I}_{\text{skew}} .$$

Как и в симметричном случае, идеал $\mathscr{I}_{\text{skew}} = \bigoplus_{n \geqslant 0} (\mathscr{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n})$ однороден[8], и фактор алгебра $\Lambda^\bullet V$ градуирована подпространствами $V^{\otimes n} / (\mathscr{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}) \simeq \Lambda^n V$.

Упражнение 1.9. Покажите, что подпространство $\mathscr{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes 2}$ содержит соотношения антикоммутативности $v \otimes w - w \otimes v$ (с произвольными $v, w \in V$).

Упражнение 1.10. Докажите, что композиция тензорного умножения с факторизацией по $\mathscr{I}_{\text{skew}}$

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \xrightarrow{\tau} V^{\otimes n} \xrightarrow{\pi} \Lambda^n(V) \qquad (1\text{-}12)$$

является универсальным кососимметричным полилинейным отображением.

Индуцированное в алгебре $\Lambda^\bullet V$ умножение (1-12) называется *внешним* (а также *косым* или *грассмановым*) и обозначается $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$. Согласно упр. 1.9 оно меняет знак при перестановке любых двух последовательных сомножителей, и стало быть, при произвольной перестановке сомножителей произведение умножается на знак перестановки.

Упражнение 1.11. Для любых $U, W \subset V$ проверьте, что $S^n U \cap S^n W = S^n(U \cap W)$ в $S^n V$ и $\Lambda^n U \cap \Lambda^n W = \Lambda^n(U \cap W)$ в $\Lambda^n V$.

Как и в симметрическом случае, фиксация базиса $e_1, e_2, \ldots, e_d \subset V$ отождествляет внешнюю алгебру с алгеброй *грассмановых многочленов* от базисных векторов e_i

$$\Lambda^\bullet V \xrightarrow{\sim} \Bbbk \langle e_1, e_2, \ldots, e_d \rangle \ ,$$

которую мы уже рассматривали в первом семестре, когда занимались определителями. По построению, грассмановы переменные e_i *анти*коммутируют $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$, и всякий грассманов моном *линеен* по каждой входящей в него переменной. Таким образом, любой грассманов моном степени n с точностью до знака можно записать в виде $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ с $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant d$.

1.7.4. ЛЕММА. *Мономы $e_I \overset{\text{def}}{=} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$, где $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ пробегает все строго возрастающие n-элементные подмножества в $\{1, 2, \ldots, d\}$, образуют базис пространства $\Lambda^n V$ однородных грассмановых мономов степени n. В частности, $\Lambda^n V = 0$ для $n > \dim V$, $\dim \Lambda^n V = \binom{d}{n}$, и $\dim \Bbbk \langle e_1, e_2, \ldots, e_d \rangle = 2^d$.*

Доказательство. Рассмотрим $\binom{d}{n}$-мерное векторное пространство U, базис которого состоит из символов ξ_I, где $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ пробегает все возрастающие n-элементные подмножества в $\{1, 2, \ldots, d\}$. Определим кососимметрическое полилинейное отображение

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \xrightarrow{\alpha} U \ : \ (e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n}) \longmapsto \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \xi_I \ ,$$

[8] $(\mathscr{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n})$ совпадает с линейной оболочкой разложимых тензоров степени n вида $(\cdots \otimes v \otimes v \otimes \cdots)$

где $I = (j_{\sigma(1)}, j_{\sigma(2)}, \dots, j_{\sigma(n)})$ есть единственная *возрастающая* перестановка индексов $(j_1, j_2, \dots, j_n)$. Это отображение универсально: для любого кососимметрического полилинейного отображения

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \xrightarrow{\varphi} W$$

правило $F(\alpha(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})$ корректно определяет единственно возможный линейный оператор $U \xrightarrow{F} W$ такой, что $\varphi = F \circ \alpha$. Поэтому имеется канонический изоморфизм между U и $\Lambda^n V$, переводящий ξ_I в $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} = e_I$. $\square$

Упражнение 1.12. Проверьте, что $f(e) \wedge g(e) = (-1)^{\deg(f)\cdot\deg(g)}\, g(e) \wedge f(e)$ для любых однородных многочленов $f(e), g(e) \in \Bbbk\langle e_1, e_2, \dots, e_d\rangle$ (в частности, многочлены, состоящие только из мономов четной степени, лежат в центре[9] грассмановой алгебры).

Упражнение 1.13. Опишите центр алгебры $\Bbbk\langle e_1, e_2, \dots, e_d\rangle$, т. е. все грассмановы полиномы, коммутирующие с *с каждым* элементом этой алгебры.

[9]напомню, что *центром* (некоммутативного) кольца называется множество всех элементов, коммутирующих с любыми элементами этого кольца