Алгебра 1 курс. Листок 3.

◇ **3.1.** *Докажите, что если p — простое число, то кольцо $\mathbb{Z}_{p^n}$ нельзя представить в виде прямого произведения каких-нибудь колец.*

◇ **3.2.** *Сколько попарно неизоморфных колец здесь выписано:*
$\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$?

◇ **3.3.** *Докажите, что любое кольцо вида $\mathbb{Z}_{n_1}\times\mathbb{Z}_{n_2}\times\ldots\times\mathbb{Z}_{n_k}$ изоморфно некоторому кольцу вида $\mathbb{Z}_{m_1}\times\mathbb{Z}_{m_2}\times\ldots\times\mathbb{Z}_{m_l}$, где числа $m_1, m_2, \ldots, m_l$ таковы, что каждое следующее является делителем предыдущего, т.е. $m_{i+1}\mid m_i$, $i=1,2,\ldots,l-1$, и что такое представление для данного кольца единственно.*

◇ **3.4.** *1) Докажите, что кольцо всех непрерывных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ нельзя представить в виде прямого произведения колец.*
2) Представьте кольцо всех непрерывных функций из $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ в $\mathbb{R}$ в виде прямого произведения колец.

◇ **3.5.** *Докажите, что множество S всех последовательностей $\{a_n\}$ действительных чисел, имеющих предел, образует кольцо относительно операций сложения и умножения. Опишите идемпотентные последовательности. Докажите, что $S\cong\mathbb{R}^m\times S$ для любого m.*

◇ **3.6.** *Докажите, что элемент $(a;b)\in A\times B$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы оба элемента $a\in A$ и $b\in B$. Выведите из этого мультипликативность функции Эйлера (задача ◇1.20г).*

◇ **3.7.** *Докажите, что элемент $(a;b)\in A\times B$ является корнем уравнения $x^2=1$ тогда и только тогда, когда оба элемента $a\in A$ и $b\in B$ удовлетворяют этому уравнению. Выведите из этого решение задачи ◇1.13.*

◇ **3.8.** *Докажите, что если $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ и $\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$ то кольцо $\mathcal{B}(\Omega)$ (с операциями симметрической разности в качестве сложения и пересечения в качестве умножения) изоморфно прямому произведению колец $\mathcal{B}(\Omega_1)\times\mathcal{B}(\Omega_2)$. Выведите из этого для случая конечного множества Ω изоморфизм $\mathcal{B}(\Omega)\cong\underbrace{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\ldots\times\mathbb{Z}_2}_{|\Omega|}$.*

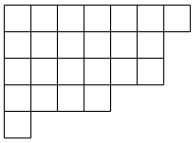
◇ **3.9.** *Кольцо называется* **булевым**, *если все его элементы идемпотентны (кроме 0 и 1).*
1) Докажите, что любое конечное булево кольцо изоморфно $\mathcal{B}(\Omega)$ для некоторого конечного множества Ω.
**2) Приведите пример бесконечного булева кольца, не изоморфного $\mathcal{B}(\Omega)$ ни для какого множества Ω.*

◇ **3.10.** *Докажите следующие тождества:*
а) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$.
б) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^nC_n^n=0$.
в) $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots+C_n^{2[\frac{n}{2}]}=2^{n-1}$.
г) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n=n2^{n-1}$.
д) $C_n^0+C_{n+1}^1+C_{n+2}^2+\ldots+C_{n+k}^k=C_{n+k+1}^k$.
е) $C_n^0+C_{n-1}^1+C_{n-2}^2+\ldots+C_{n-[\frac{n}{2}]}^{[\frac{n}{2}]}=f_n$ — *n-ое число Фиббоначи.*
($[x]$ это целая часть числа x.)
ж) $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$.

◇ **3.11.** *Докажите формулу для биномиальных коэффициентов:* $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

◇ **3.12.** *а) Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$? ($m$, n натуральные числа.)*
б) А сколько это уравнение имеет решений в натуральных числах?
в) Сколько существует одночленов степени n от m переменных?

Диаграммой Юнга называется фигурка, ограниченная северной и западной сторонами нарисованного по линиям клетчатой бумаги прямоугольника и какой-нибудь проведенной по линиям клетчатой бумаги кратчайшей ломаной, соединяющей юго-западную вершину этого прямоугольника с северо-восточной.



Это диаграмма Юнга, имеющая 5 строк и 7 столбцов.

◇ **3.13.** *а) Сколько существует различных диаграмм Юнга, имеющих из не более чем n строк и не более чем m столбцов?*
а) Сколько существует различных диаграмм Юнга, имеющих ровно n строк и ровно m столбцов?

◇ **3.14.** *1) Докажите формулу "тринома": $(a+b+c)^n = \sum\limits_{k+l+m=n} \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} a^k b^l c^m$. (Сколько слагаемых стоит в правой части?)*
2) Придумайте и докажите обобщение этой формулы на произвольное (конечное) число слагаемых.

◇ **3.15.** *Докажите, что многочлен $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1$ делится нацело на многочлен $x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + x + 1$ тогда и только тогда, когда $n+1$ делится нацело на $k+1$.*

◇ **3.16.** *Найдите остаток от деления многочлена $x^{11111} + x^{321} + 1$*
а) на $x^2 - 1$;   б) на $x^2 + 1$;   в) на $x^2 - x + 1$.

В задачах 3.17 - 3.23 нужно вычислить ответ в кольце формальных степенных рядов, т.е. получить ответ в виде $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ и объяснить, как найти a_n.

◇ **3.17.** *а)* $\frac{1}{10x+1}$*;*   *б)* $\frac{1}{2+x}$*;*   *в)* $\frac{1}{2x^2-3x+1}$.

◇ **3.18.** $\frac{1}{1-x-x^2}$. *Как называется последовательность коэффициентов этого ряда?*

◇ **3.19.** $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots)$.

◇ **3.20.** *а)* $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots)^2$*;*   *б)* $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \ldots)^n$.

◇ **3.21.** *а)* $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots)^2$*;*   *б)* $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots)^n$*;*

$$в)\ \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots}.$$

◇ **3.22.** $2(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots)(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots)$.

◇ **3.23.** ***** $\left[1 - 2x - \left(\frac{1}{2!}2^2x^2 + \frac{1\cdot3}{3!}2^3x^3 + \frac{1\cdot3\cdot5}{4!}2^4x^4 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{5!}2^5x^5 + \ldots\right)\right]^2$. *(Замена $y = 2x$ не возбраняется.)*

◇ **3.24.** ***** *Докажите, что ряд $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{3!} \ldots$ нельзя представить в виде отношения двух многочленов.*

◇ **3.25.** *Придумайте ряд, коэффициентами которого являются только нули и единицы, который нельзя представить в виде отношения двух многочленов.*

◇ **3.26.** ***** *Как связана задача ◇3.23 с задачей ◇2.3.2?*