Вопросы к коллоквиуму.

Коллоквиум состоится на 1 паре во вторник, 5 октября. Каждый вопрос надо рассказать подробно, с полным доказательством, и уметь решить связанные с данной темой задачи. Студенты, получившие за первые два листочка плюс контрольная в сумме не менее 24 баллов, могут автоматически получить за коллоквиум среднее арифметическое этих трех оценок.

1) Условие разрешимости диофантова уравнения $ax + by = 1$. (Требуется уметь решить конкретное уравнение.)

2) Доказательство основной теоремы арифметики.

3) Критерий обратимости остатка $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$. Как перечислить все делители нуля в $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$?

4) Критерий нильпотентности остатка $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$. Как перечислить все нильпотентные элементы в $\in \mathbb{Z}_n$?

5) Критерий существования идемпотентного элемента $\in \mathbb{Z}_n$. Как указать идемпотентные элементы в случае, когда $n = kl$, $(k, l) = 1$?

6) Деление многочленов с остатком в кольце $A[x]$ (A — кольцо). Условия существования и единственности.

7) Теорема Безу в кольце $A[x]$ (A — кольцо). Представление любого многочлена в виде $P(x) = (x - a_1) \dots (x - a_k)S(x)$, где $S(x)$ не имеет корней в кольце A.

8) Теорема Эйлера и малая теорема Ферма.

9) Критерий разложимости кольца в прямое произведение.

10) Функция Эйлера $\varphi(n)$. Вычисление $\varphi(p^k)$, мультипликативность $\varphi(n)$.

11) Китайская теорема об остатках для двух взаимно простых сомножителей. Явная формула (с использованием идемпотентных элементов).

12) Характеристика кольца без делителей нуля. Простота характеристики.

13) Любое кольцо содержит подкольцо, изоморфное $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}_n$.

14) Теорема Вильсона.

15) Уметь отвечать на вопросы, подобные перечисленным в задачах 2.4, 2.19, 2.21 и 2.23 (и на все вопросы из этих задач!).