

Отображения плоскости. Барицентрические координаты.

- 2.1.** Постройте гомеоморфизм плоскости, отличный от движения и переводящий в себя правильный семиугольник.
- 2.2.** Можно ли отобразить евклидову плоскость на какую-либо ее часть с сохранением расстояний между точками?
- 2.3.** Все гомеоморфизмы плоскости, которые переводят прямые в прямые, образуют группу. Доказать.
- 2.4.** Для каких n в евклидовом пространстве существует выпуклый n -гранный угол с нетупыми двугранными углами?
- 2.5.** Перечислите (с точностью до движения) все выпуклые многогранные углы с двугранными углами вида π/n , $n = 2, 3, 4, \dots$
- 2.6.** Можно ли представить пространство в виде объединения попарно скрещивающихся прямых?
- 2.7.** Можно ли на клетчатой бумаге нарисовать правильный семиугольник с вершинами в узлах сетки?
- 2.8.** В евклидовом пространстве висит правильный треугольник. Можно ли спроектировать его (ортогонально) на некоторую плоскость так, чтобы в проекции получить треугольник с углами $\pi/7, 2\pi/7, 4\pi/7$?
- 2.9.** Докажите существование и единственность барицентрических координат.
- 2.10.** Даны две системы барицентрических координат $(P_1, P_2, P_3), (P'_1, P'_2, P'_3)$. Напишите формулы пересчета координат.
- 2.11.** Вокруг правильного треугольника с вершинами P_1, P_2, P_3 описана окружность. Найдите её уравнение в барицентрической системе координат (P_1, P_2, P_3) .

Государственный образовательный стандарт

- 2.12.** Даны координаты вершин ABC и A' параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$: $A(2; 1; -1)$, $B(3; 4; 0)$, $D(1; 1; 1)$, $A'(0; 3; 1)$. Найдите расстояние между:
- вершиной A и гранью $BB'C'C$;
 - вершиной C и диагональной плоскостью $BB'D'D$;
 - основаниями $ABCD$ и $A'B'C'D'$.
- 2.13.** Найдите уравнение сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$: $A(0; 0; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(0; -2; 0)$, $D(0; 0; 2)$.
- 2.14.** Дано уравнение сферы S и плоскости α . Найдите уравнение такой плоскости, которая касается S и параллельна α .

$$S: (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad \alpha: 4x - 3y + 6 = 0.$$

- 2.15.** Найдите ортогональную проекцию точки M на плоскость π :

$$M(7; 4; -4), \quad \pi: x + y - z - 6 = 0.$$

- 2.16.** Найдите уравнение ортогональной проекции прямой l на плоскость π :

$$l: \frac{x - 3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z + 1}{3}, \quad \pi: 2x + y + z + 4 = 0.$$

2.17. Найдите расстояние от точки M до прямой l :

$$M(0; 0; 0), \quad l: \begin{cases} x = -1 - t, \\ y = 2t, \\ z = -3 + 2t. \end{cases}$$

2.18. Найдите координаты точки пересечения высот треугольника ABC : $A(0; 0; 0)$, $B(-2; 1; 1)$, $C(3; 1; 0)$.

2.19. Докажите, что прямые l_1 и l_2 скрещиваются. Найдите уравнения прямой, которая пересекает l_1 и l_2 и им перпендикулярна (общего перпендикуляра этих прямых):

$$l_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = z, \quad l_2: \begin{cases} x = t, \\ y = -1 - t, \\ z = 3t. \end{cases}$$