

Теория: прямая,

Преобразование φ аффинной прямой \mathbb{A}^1 называется *аффинным*, если оно сохраняет простое отношение трех точек, т.е. $\frac{\varphi(M_2) - \varphi(M_1)}{\varphi(M_3) - \varphi(M_1)} = \frac{M_2 - M_1}{M_3 - M_1}$ для любых трех точек M_1, M_2, M_3 из \mathbb{A}^1 .

- 3.1.** Докажите, что любое аффинное преобразование прямой записывается в аффинном базисе (репере) формулой $x \rightarrow ax + b$, где $a \neq 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$). В качестве следствия получаем, что любое аффинное преобразование прямой полностью определяется образами двух точек (почему?)

...плоскость

- 3.2.** Аффинное преобразование плоскости действует на точки, а, тем самым, и на векторы (как?) Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношение коллинеарных векторов.
- 3.3.** Докажите, что аффинное преобразование плоскости индуцирует аффинное преобразование прямой на свой образ (этот факт вместе с задачей 3.2 оправдывает «стрange» определение аффинного преобразования $\mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$).
- 3.4.** Верно ли, что при аффинном преобразовании сохраняется отношение площадей фигур?

...и пространство

- 3.5.** Непрерывный гомеоморфизм пространства \mathbb{A}^3 , отображающий каждую плоскость на плоскость, называется аффинным преобразованием \mathbb{A}^3 . Пусть $\varphi \in \text{Aff}\mathbb{A}^3$. Докажите, что φ :
- а)** переводит прямые в прямые;
 - б)** параллельные плоскости переводят в параллельные;
 - в)** сохраняет параллельность прямых и параллельность прямой и плоскости;
 - г)** скрещивающиеся прямые отображает в скрещивающиеся;
 - д)** индуцирует аффинное преобразование плоскости на её образ.
- 3.6.** Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее данные четыре некомпланарные точки A, B, C, D в четыре наперед заданные некомпланарные точки A_1, B_1, C_1, D_1 .
- 3.7.** Верно ли, что аффинное преобразование способно перевести куб в произвольный параллелепипед?
- 3.8.** Докажите, что группа аффинных самосовмещений тетраэдра изоморфна группе S_4 .
- 3.9.** Докажите, что непрерывный гомеоморфизм пространства \mathbb{A}^n ($n = 1, 2, 3$), сохраняющий барицентрические координаты точки (а что это значит?), является аффинным преобразованием.

Практика

- 3.10.** Докажите, что если стороны BC и AD четырехугольника $ABCD$ параллельны и M — произвольная точка стороны AB , то прямая, проходящая через точку A параллельно CM , пересекает прямую, проходящую через точку B параллельно DM , в точке, лежащей на стороне CD .

- 3.11.** Докажите, что середины диагоналей выпуклого четырехугольника и середина отрезка, соединяющего точки пересечения его противоположных сторон, лежат на одной прямой.
- 3.12.** Докажите, что любое аффинное преобразование прямой можно продолжить до аффинного преобразования плоскости, причём это продолжение будет определено однозначно, если дополнительно указать точку и ее образ.
- 3.13. а)** Запишите аффинное преобразование, которое точки $(-1, 2), (2, 1), (1, -1)$ переводит в точки $(-3, 0), (6, 2), (10, -1)$ соответственно. Есть ли у этого преобразования: неподвижная точка? неподвижная прямая? инвариантная прямая?
б) Те же вопросы относительно аффинного преобразования $f(x, y) = (3x - 2y + 2, 2x - y + 2)$.
- 3.14.** Покажите, что аффинное преобразование $f(x, y) = (-2x - 3y + 3, x + 2y - 1)$ есть отражение. Найдите уравнение зеркала и вектор направления.
- 3.15.** Запишите отражение с зеркалом $2x - y + 1 = 0$ и направлением $(1, 0)$.
- 3.16.** Запишите произведение двух отражений в системе координат, состоящей из векторов направлений в точке пересечения зеркал, и постарайтесь ответить на все вопросы задачи 3.13.
- 3.17.** Докажите, что две трапеции тогда и только тогда аффинно равны, когда совпадают отношения их оснований.
- 3.18.** Докажите, что для того, чтобы два четырехугольника (A, B, C, D) и (A', B', C', D') были аффинно равны, необходимо и достаточно, чтобы совпадали отношения, в которых делятся диагонали этих четырехугольников точками пересечения диагоналей M и M' .
- 3.19.** Докажите, что для того, чтобы пятиугольник $ABCDE$ был аффинно-правильным (аффинно равен правильному) необходимо и достаточно, чтобы четыре его диагонали были параллельны сторонам, не имеющим с этими диагоналями общих вершин.
- 3.20.** Пусть аффинное преобразование переводит один пучок параллельных прямых в другой. Докажите, что тогда соответственные прямые этих пучков пересекаются в точках, лежащих на одной прямой.
- 3.21.** Рассмотрим пучок прямых, проходящих через начало координат, и его образ при аффинном преобразовании $f(x, y) = (2x + 1, y + 2)$. Нарисуйте ГМТ пересечения соответственных прямых этих пучков.