

Вещественные числа, цепные дроби

Задача 1. Запишите бесконечной l -ичной дробью простые дроби

a) $\frac{1}{l-1}$;

b) $\frac{1}{l+1}$.

Задача 2. Запишите простой дробью бесконечные l -ичные дроби ($l > 2$)

a) $1.2121212\dots$;

b) $0.12012012\dots$.

Задача 3. а) Докажите, что периодические бесконечные l -ичные дроби задают рациональные числа.

б) Докажите, что у всякого рационального числа его бесконечная l -ичная дробь будет периодической начиная с некоторого места.

Задача 4. Найдите числа, заданные цепными дробями

a) $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$;

b) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$;

c) $k + \frac{1}{k + \frac{1}{k + \dots}}$;

d) $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}$.

Задача 5. Разложите в цепную дробь следующие числа:

a) $\frac{2n-1}{n}$;

b) $\sqrt{2}$;

c) $\sqrt{3}$.

Задача 6. Докажите, что цепная дробь любого рационального числа конечна.

Задача 7. Докажите, что если цепная дробь числа x задается периодической последовательностью, то x является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Задача 8*. Докажите, что если x является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами, то цепная дробь x задается периодической с некоторого места последовательностью.

Подсказка: проследите за дискриминантом уравнения и знаками его коэффициентов в процессе разложения в цепную дробь.