Комплексные числа

Задача 1. Докажите, что поле комплексных чисел невозможно линейно упорядочить (так, чтобы выполнялись все свойства из Листка 2).

Задача 2. a) Докажите, что z_1, z_2 и z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда отношение $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$ вещественно.

b) Докажите, что z_1, z_2, z_3 и z_4 лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда *двойное отношение*

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \bigg/ \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

вещественно.

Задача 3. Пусть $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$. Нарисуйте на плоскости множество z, для которых выполнено

a) $|z - 1| = k|z + 1|$;

b) $|z - 1| + |z + 1| = k$;

c) $|z - 1| \cdot |z + 1| = k$ (лемниската Бернулли).

d) Какие множества получатся, если равенство заменить неравенством $\geqslant$ или $\leqslant$?

Задача 4. Используя арифметические действия, модуль комплекного числа и равенства, изобразите на плоскости

a) прямую $ax + by = c$;

b) отрезок прямой между точками z_1 и z_2;

c) координатный крест $xy = 0$;

d) гиперболу $x^2 + y^2 = a$.

Задача 5. Вычислите, используя комплексные числа

a) $\cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)$;

b^*) $\frac{\sin(x)+\sin(3x)+\cdots+\sin((2n-1)x)}{\cos(x)+\cos(3x)+\cdots+\cos((2n-1)x)}$;

c^*) $\sin(x) + 2\sin(2x) + 3\sin(3x) + \cdots + n\sin(nx)$;

d) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots$, где $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент;

Подсказка: воспользуйтесь биномом Ньютона

e^*) $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \binom{n}{9} + \ldots$.

Задача 6. a) Докажите, что существует многочлен T_n, такой что $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$ (он называется *многочленом Чебышёва* первого рода).

b) Докажите, что существует многочлен U_n, такой что $\sin(nx) = \sin(x)U_{n-1}(\cos(x))$ (он называется *многочленом Чебышёва* второго рода).

Задача 7*. Правильный n-угольник вписан в окружность радиуса 1. Вычислите для него

a^*) сумму квадратов длин всех сторон и диагоналей;

b^*) произведение длин всех сторон и диагоналей.