Пределы

Задача 1. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \neq 0$ и $a_i \neq 0$ для всех i, то $\lim\limits_{n\to\infty} 1/a_n = 1/A$.

Задача 2. a) Докажите что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ и для всякого n выполнено $a_n \geqslant b_n$, то $A \geqslant B$.

b) Можно ли ослабить условие пункта a), предположив что $a_n \geqslant b_n$ для бесконечного подмножества $n \in \mathbb{N}$?

c) Можно ли в пункте a) заменить нестрогие неравенства на строгие?

Задача 3. a) Докажите *лемму о двух милиционерах*: если $a_n \geqslant b_n \geqslant c_n$ для всех n и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, то последовательность b_n тоже сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

b) Можно ли в условиях леммы предположить, что неравенства выполнены для бесконечного подмножества $n \in \mathbb{N}$? Для всех n кроме конечного подмножества?

Задача 4. Докажите сходимость и вычислите предел следующих последовательностей:

a) $a_n = \frac{an+b}{cn+d}$, $c \neq 0$;

b) $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, где P и Q — многочлены одинаковой степени;

c) $a_n = \frac{n!}{n^n}$;

d) $a_n = \sqrt[n]{n}$;

e) $a_n = 1/\sqrt[n]{n!}$;

f) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $a, b > 0$;

g) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \ldots, a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (всего n знаков корня);

h^*) $a_n = 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$ (всего n знаков корня).

Подсказка: сначала произведите компьютерный эксперимент.

Задача 5. При каких значениях параметра сходятся следующие последовательности:

a) $a_n = q^n$, $q \in \mathbb{C}$;

b) $a_n = q^n/n$, $q \in \mathbb{C}$;

c) $a_n = n^k q^n$, $k \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{C}$;

d) $a_n = q^n/n!$, $q \in \mathbb{C}$.

Задача 6. Может ли множество предельных точек последовательности совпадать со следующим множеством:

a) конечный набор чисел $A_1, \ldots, A_n$, $n > 0$;

b) пустое множество;

c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$;

d) $1/n | n \in \mathbb{Z}$;

e) $1/n | n \in \mathbb{Z} \cup \{0\}$;

f) отрезок $[0, 1]$;

g) интервал $(0, 1)$;

h) всё $\mathbb{R}$;

i) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;

j^*) канторово множество — числа от 0 до 1, в троичной записи которых отсутствует цифра 1 (но допускается бесконечный хвост из двоек, например $1 = 0.222\ldots$).