Знакопостоянные ряды

Определение 1. *Рядом* называется последовательность чисел $S_n = a_1 + \dots + a_n$, *суммой ряда* — предел этой последовательности. Числа S_n называются *частичными суммами* последовательности S_n.

Определение 2. Ряд $a_1 + a_2 + \dots$ называется *знакопостоянным* при вещественных неотрицательных a_i.

Задача 1. a) Докажите, что знакопостоянный ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

Подсказка: воспользуйтесь точной верхней гранью.

b) Докажите, что знакопостоянный ряд сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n_1 > \dots > n_k > N \qquad a_{n_1} + \dots + a_{n_k} < \varepsilon.$$

Подсказка: воспользуйтесь критерием Коши.

c) Докажите, что сходимость знакопостоянного ряда и его сумма не изменится при перестановке слагаемых.

Подсказка: это отнюдь не следует напрямую из коммутативности сложения.

Задача 2. Какие из следующих рядов сходятся? Вычислите их сумму.

a) $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$ (геометрическая прогрессия);

b) $1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots$ (производная геометрической прогрессии);

c^*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n(n+1)(n+2)\dots(n+k)$;

d) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ (гармонический ряд);

e) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \dots$.

Задача 3. a) Докажите *мажорантный признак*: если $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ и ряд $b_1 + \dots + b_n$ сходится, то и ряд $a_1 + \dots + a_n$ сходится.

b) Докажите *признак д'Аламбера*: если $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) = q$, то при $q < 1$ ряд $a_1 + a_2 + \dots$, сходится, а при $q > 1$ — расходится.

c) Докажите *признак Коши*: если $a_n \geqslant 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}_n = q$, то при $q < 1$ ряд $a_1 + a_2 + \dots$, сходится, а при $q > 1$ — расходится.

Подсказка: в b) и c) воспользуйтесь мажорантным признаком и геометрической прогрессией.

Задача 4. a) Докажите, что ряд $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$ сходится. Его сумма называется *числом Эйлера* и обозначается e.

b) Докажите, что число e иррационально.

c) Докажите, что $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Подсказка: разложите степень по биному, отдельно оцените отличие первых слагаемых от соответствующих членов ряда и вклад остальных слагаемых.

Задача 5. Сходятся ли следующие ряды:

a) $\frac{q^0}{0!} + \frac{q^1}{1!} + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^3}{3!} + \frac{q^4}{4!} + \dots$, $q > 0$;

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{q^n}$, $k \in \mathbb{N}$, $q > 0$;

d) $\frac{1!}{1^1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \dots$;

e) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$;

$f^*)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n^l}}$, $k, l \in \mathbb{N}$;

$g^*)$ $\sum\limits_{n \in I_{k,l}} 1/n$, где $I_{k,l} \subset \mathbb{N}$ — множество чисел, не содержащих k в l-ичной записи.

Задача 6* (признак Куммера). Пусть $c_1, c_2, \ldots$ — последовательность положительных вещественных чисел, такая что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1/c_n$ расходится. Для знакопостоянного ряда $a_1 + a_2 + \ldots$ положим $K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$.

$a^*)$ Докажите, что если $K_n \leqslant 0$ начиная с некоторого номера, то ряд $a_1 + a_2 + \ldots$ расходится.

$b^*)$ Докажите, что если $K_n \geqslant 0$ начиная с некоторого номера, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})$ сходится.

$c^*)$ Докажите, что если $K_n \geqslant \delta > 0$ начиная с некоторого номера, то ряд $a_1 + a_2 + \ldots$ сходится.

$d^*)$ Запишите получившийся признак для $c_n = n$ (он называется *признаком Раабе*). Что получится, если взять $c_n = 1$?