

Математическая логика и алгоритмы. Задание 1

- Докажите эквивалентность: $((\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma) \sim (\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma))$.
- Построить электрическую цепь для голосования в комиссии из трех человек. Голосование каждого проводится нажатием на кнопку. Решение принимается, если за него проголосовало большинство членов комиссии.
- Построить таблицы истинности для следующих формул:
 - $\neg(p \Rightarrow \neg(q \wedge p)) \Rightarrow (p \vee r)$,
 - $(p \wedge (q \Rightarrow p)) \Rightarrow \neg p$,
 - $((p \wedge \neg q) \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,
 - $(p \wedge (q \vee \neg p)) \wedge ((\neg q \Rightarrow p) \vee q)$.
- Доказать, что следующие формулы являются тавтологиями:
 - $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$,
 - $(p \Rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$,
 - $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$,
 - $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \vee r) \Rightarrow (q \vee r))$,
 - $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$.
- Докажите следующие утверждения.
 - Если формулы $(\alpha \vee \beta)$, $(\neg \alpha \vee \gamma)$ - тавтологии, то и формула $(\beta \vee \gamma)$ - тавтология.
 - Если формулы $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \gamma)$, $(\beta \Rightarrow \delta)$ - тавтологии, то и $(\delta \vee \gamma)$ - тавтология.
 - Если формулы $(\neg \alpha \vee \beta)$, $(\neg \beta \vee \neg \gamma)$, $(\beta \Rightarrow \delta)$ - тавтологии, то и $(\neg \alpha \vee \delta \vee \neg \gamma)$ - тавтология.
- Записать формулу, выражающую следующее рассуждение и проверить, является ли она тавтологией.
 - Если строить противоатомные убежища, то другие государства будут чувствовать себя в опасности, а наш народ получит ложное представление о своей безопасности. Если другие государства будут чувствовать себя в опасности, то они могут начать превентивную войну. Если наш народ получит ложное представление о своей безопасности, то он ослабит свои усилия, направленные на сохранение мира. Если же не строить противоатомные убежища, то мы рискуем иметь колоссальные потери в случае войны. Следовательно, либо другие государства могут начать превентивную войну, либо мы рискуем иметь колоссальные потери в случае войны.
 - Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство произошло после полуночи. Если убийство произошло после полуночи, то либо убийство произошло после полуночи, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит был убийцей.
 - Если инвестиции останутся постоянными, то вырастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не вырастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и инвестиции останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы вырастут.
 - Если мы не будем продолжать политику сохранения цен, то мы потеряем голоса фермеров. Если же мы будем продолжать эту политику, то продолжится перепроизводство, если только мы не прибегнем к контролю над

производством. Без голосов фермеров нас не переизберут. Значит, если нас переизберут и мы не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство.

7. Докажите эквивалентности:

а) $\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \sim (\alpha \wedge \neg\beta)$,

б) $\neg(\alpha \Leftrightarrow \beta) \sim (\neg\alpha \Leftrightarrow \beta)$,

в) $((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \delta) \wedge (\gamma \vee \delta)) \sim ((\alpha \wedge \delta) \vee (\beta \wedge \gamma))$,

г) $((\alpha \vee \beta) \wedge (\beta \vee \gamma) \wedge (\gamma \vee \delta)) \sim ((\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \delta))$,

д) $((\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)) \sim \alpha$,

е) $(\alpha \vee \beta) \sim ((\alpha \wedge \beta) \vee ((\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta)))$.

8. Найти более короткую эквивалентную запись для следующих формул:

а) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \Rightarrow q$,

б) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p))$,

в) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \vee ((q \Rightarrow p) \Rightarrow q)$.

9. Имеется клуб с такими правилами:

(1) Члены финансового комитета должны избираться из состава правления.

(2) Нельзя быть одновременно членом правления и членом издательского совета, не будучи членом финансового комитета.

(3) Никто из членов издательского совета не может входить в финансовый комитет.

Упростите правила.

10. Браун, Джонс и Смит обвиняются в подделке документов. Они дают следующие показания:

Браун: Джонс виновен, а Смит невиновен.

Джонс: Если Браун виновен, то и Смит виновен.

Смит: Я невиновен, но кто-то из остальных двоих виновен.

А) Совместимы ли эти показания?

Б) Если все показания истинны, то кто виновен, а кто - нет?

В) Если все трое невиновны, то кто дал ложные показания?

Г) Если невиновный говорит правду, а виновный лжет, то кто виновен?

11. Свет в комнате включается с помощью 3 различных выключателей: нажатие на любой из них включает свет, если он был выключен, и выключает свет, если он был включен.

Построить соответствующую электрическую цепь.

12. Встретились 3 друга: Белов, Чернов и Рыжов. "Волосы одного из нас - рыжие, другого - черные, третьего - белые, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии", - заметил черноволосый. "Ты прав", - подтвердил Белов. Возможно ли, что все сказали правду?

13. Старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков - это один и тот же человек или, возможно, разные?

14. Лучший математик среди шахматистов и лучший шахматист среди математиков - это один и тот же человек или, возможно, разные?

15. В группе из 25 человек английский язык изучают 20, немецкий - 10, оба языка - 7 человек. Сколько человек не изучает ни английского, ни немецкого языка?

16. На международном конгрессе встретились физик, историк, биолог и математик. Каждый из них владеет 2 языками из четырех (русский, французский, английский, немецкий), но нет такого языка, на котором могут разговаривать все четверо. На

немецком говорят трое. Никто не владеет одновременно русским и французским языками одновременно. Физик не говорит по-английски, но может быть переводчиком, если биолог и историк захотят поговорить друг с другом. Историк не может говорить с математиком по-французски. Физик, биолог и математик не могут беседовать втроем на одном языке. Найдите, кто какими языками владеет.