

### Логика и алгоритмы -2010. Задание 3

41. Исходя из определения упорядоченных пар  $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$ , докажите основное свойство:  $(x,y)=(x',y') \Rightarrow (x=x' \wedge y=y')$ .

42. Даны непустые множества  $A, B$ , такие что  $A \times B = B \times A$ . Докажите, что  $A = B$ .

43. Докажите следующие равенства:

а)  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ ,

б)  $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ ,

в)  $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ ,

г)  $(E \times E) \setminus (A \times B) = ((E \setminus A) \times E) \cup (E \times (E \setminus B))$  (для  $A, B \subseteq E$ ).

44. Докажите равенства:

а)  $(A_1 \cap \dots \cap A_n) \times (B_1 \cap \dots \cap B_m) = \bigcap \{ (A_i \times B_j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \}$ ,

б)  $(A_1 \cup \dots \cup A_n) \times (B_1 \cup \dots \cup B_m) = \bigcup \{ (A_i \times B_j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \}$ .

45. Путешественник попал на остров, где живут два вида людей: одни всегда говорят правду, другие - всегда лгут.

а) Какой вопрос вида "верно ли  $\alpha$ ?" нужно задать аборигену, чтобы выяснить, истинно ли некоторой конкретное высказывание  $\alpha$ ?

б) Докажите, что ответ на вопрос об истинности  $\alpha$  эквивалентен истинности  $\alpha$ .

46. Имеется 5 домов разного цвета. Их владельцы - разной национальной принадлежности, предпочитают разные напитки, курят разные виды сигарет и содержат разных домашних животных. Известно также:

- Англичанин живет в красном доме.
- Швед держит собаку.
- Датчанин пьет чай.
- Если смотреть с фасада, то зеленый дом - соседний слева от белого.
- Хозяин зеленого дома пьет кофе.
- Человек, который курит Pall Mall, держит птиц.
- Хозяин желтого дома курит Dunhill.
- Хозяин центрального дома пьет молоко.
- Норвежец живет в самом левом доме.
- Человек, который курит Blends, - сосед владельца кошки.
- Владелец лошади - сосед человека, который курит Dunhill.
- Человек, который курит Bluemasters, пьет пиво.
- Немец курит Prince.
- Норвежец живет по соседству с синим домом.
- У человека, который курит Blends, есть сосед, который пьет воду.
- Кто-то из них разводит рыбок.

Запишите условие задачи в виде пропозициональной формулы и восстановите всю недостающую информацию.

47. Даны множества  $A_1, B_1, \dots, A_n, B_n \subseteq E$ .

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} A_1 \cap X = B_1, \\ \dots \\ A_n \cap X = B_n. \end{cases}$$

При каких условиях система имеет решения?

48. Опишите общий метод решения систем уравнений вида

$$\begin{cases} F_1(A, X) = G_1(B, X) \\ F_2(A, X) = G_2(B, X) \end{cases}$$

где  $F_1, F_2$  - булевы термы,  $A, B$  - даны,  $X$  - неизвестное.

49. Докажите, что формула  $\neg p$  не эквивалентна никакой формуле, построенной из пропозициональных букв и связок  $\vee, \wedge, \Rightarrow$ .