Логика и алгоритмы -2010. Задание 2

17. Докажите следующие равенства:

а) $(A\setminus B)\setminus C = (A\setminus C)\setminus (B\setminus C) = A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B) \cap (A\setminus C)$,

в) $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B) \cup (A\setminus C)$,

г) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$,

д) $(A\triangle B) \cap C = (A\cap C)\triangle(B\cap C)$.

18. Докажите, что для любых множеств A,B,C

$A\triangle B = C \Leftrightarrow B\triangle C = A \Leftrightarrow A\triangle C = B$.

19. Докажите, что для любых множеств $A_1,B_1,\dots,A_n,B_n$

а) $(A_1\cap\ldots\cap A_n) \triangle(B_1\cap\ldots\cap B_n) \subseteq (A_1\triangle B_1) \cup\ldots\cup (A_n\triangle B_n)$,

б) $(A_1\cup\ldots\cup A_n) \triangle(B_1\cup\ldots\cup B_n) \subseteq (A_1\triangle B_1) \cup\ldots\cup (A_n\triangle B_n)$.

20. Выразите

а) операции $\cup$, $\setminus$ через $\triangle$, $\cap$,

б) операции $\cap$, $\setminus$ через $\triangle$, $\cup$,

в) операции $\cap$, $\cup$ через $\triangle$, $\setminus$.

21. Выразите связки $\wedge,\vee$ через $\neg$, $\Rightarrow$ (т.е. постройте формулы, эквивалентные $(p\vee q)$ и $(p\wedge q)$ и использующие только $\neg$, $\Rightarrow$ и буквы p, q).

22. Приведите следующие формулы к СДНФ и СКНФ

а) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p)) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg r))$,

б) $((((p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r) \Rightarrow r$,

в) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow\neg r) \Rightarrow(p \Rightarrow\neg q))$.

23. Сформулируйте и докажите правило построения СКНФ по таблице истинности пропозициональной формулы.

24. В кондитерском отделе магазина продаются торты и конфеты в коробках. Посетители покупают либо 1 торт, либо 1 коробку конфет, либо 1 торт и 1 коробку конфет. В течение дня продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт, и коробку конфет?

25. В летнем лагере 65% студентов умеют играть в футбол, 70% - в волейбол и 75% - в баскетбол. Каково наименьшее число студентов, умеющих играть и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол?

26. Каждый 10-й шахматист - математик, а каждый 6-й математик - шахматист. Кого больше: математиков или шахматистов и во сколько раз?

27. Дано конечное множество натуральных чисел A. Каждый элемент из A делится хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5. Также известно следующее:

- A содержит ровно 70 чисел, кратных 2;
- A содержит ровно 60 чисел, кратных 3;
- A содержит ровно 80 чисел, кратных 5;
- A содержит ровно 32 числа, кратных 6;
- A содержит ровно 35 чисел, кратных 10;
- A содержит ровно 38 чисел, кратных 15;
- A содержит ровно 20 чисел, кратных 30.

Найти число элементов в A.

28. В фирме каждый сотрудник знает английский, немецкий или французский язык. При этом 6 человек знают английский, 6 - немецкий, 7 - французский, 4 - английский и немецкий, 3- французский и немецкий, 2 - французский и английский, 1 - все три языка. Сколько всего сотрудников в фирме? Сколько из них знает только английский язык?

29. а) Сколько целых чисел от 0 до 999 не делятся ни на 2, ни на 3?

б) Сколько целых чисел от 0 до 999 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

30. Существуют ли такие множества A,B,C, что

$A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = (A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

31. Рассмотрим 3 отрезка на числовой прямой: A=[0,1], B=[1,4], C=[2,5]. Какие из следующих 7 множеств непусты:

$A \cap B \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $\overline{B} \cap A \cap C$, $\overline{C} \cap A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{B} \cap \overline{C} \cap A$, $\overline{C} \cap \overline{A} \cap B$?

(Черта здесь обозначает дополнение до прямой)

32. Существуют ли отрезки A, B, C на одной прямой, такие что все 7 множеств

$A \cap B \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $\overline{B} \cap A \cap C$, $\overline{C} \cap A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{B} \cap \overline{C} \cap A$, $\overline{C} \cap \overline{A} \cap B$ непусты?

33. Три подмножества A, B, C множества U назовем *независимыми*, если все множества

$A \cap B \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $\overline{B} \cap A \cap C$, $\overline{C} \cap A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{B} \cap \overline{C} \cap A$, $\overline{C} \cap \overline{A} \cap B$,

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ непусты (черта обозначает дополнение до U).

а) Докажите, что если множества A, B, C независимы, то их объединение содержит по крайней мере 7 элементов.

б) Найдите 3 независимых подмножества в множестве {1,2,3,4,5,6,7,8}.

34. Рассматриваются множества на плоскости.

а) Существуют ли 3 независимых отрезка?

б) Существуют ли 3 независимых полуплоскости?

в) Существуют ли 3 независимых окружности?

35. а) Дайте определение независимости для системы подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ множества U.

б) Сколько независимых подмножеств может содержать множество из 100 элементов?

в) Постройте 4 независимых подмножества в множестве {1,2,3,…,20}.

36. Постройте 4 независимых прямоугольника на плоскости.

37. Пусть M - множество, элементами которого являются другие множества. M называется *транзитивным*, если любой элемент любого элемента M снова является элементом из M. Постройте транзитивное множество, состоящее из трех различных элементов.

38. Постройте множество M из 5 элементов со следующим свойством:

$$\forall x \in M\ \forall y \in M\ (x \in y \vee y \in x \vee x = y).$$

39. Даны множества A, B, E, причем $B \subseteq A \subseteq E$.

а) Найдите все $X \subseteq E$, такие что $A \cap X = B$.

б) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} A \cap X = B, \\ A \cup X = E. \end{cases}$$

40. Найдите пропозициональную формулу α, такую что $(\alpha \wedge p) \sim (p \wedge q)$ и $(\alpha \vee p)$ - тавтология (p, q - пропозициональные буквы).