Поляризация многочленов

А3◇1. Пусть $V = \mathrm{Hom}(U_-, U_+)$, где $\dim U_\pm = 2$, и $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$. Выразите S^2V и $\Lambda^2 V$ через S^2 и Λ^2 от $U_\pm$ и $U_\pm^*$.

А3◇2. Пусть в условиях зад. А3◇1 $\Bbbk = \mathbb{C}$ и на пространстве V дана невырожденная квадратичная форма g с поляризацией $\widetilde{g}$, задающая квадрику $G \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$. Определим на $\Lambda^2 V$ билинейную форму $\Lambda^2\widetilde{g}$ правилом $\Lambda^2\widetilde{g}(\, v_1 \wedge v_2\, ,\, w_1 \wedge w_2\,) \overset{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \widetilde{g}(v_1, w_1) & \widetilde{g}(v_1, w_2) \\ \widetilde{g}(v_2, w_1) & \widetilde{g}(v_2, w_2) \end{pmatrix}$.

а) Найдите матрицу Грама этой формы в базисе $e_{ij} = e_i \wedge e_j$, где e_i составляют g-ортонормальный базис в V. Симметрична ли она? Вырождена ли?

б) **(плюккерово вложение)** Сопоставим линейной оболочке пары неколлинеарных векторов $u, v \in V$ грассманов бивектор $u \wedge v$. Покажите, что это корректно задаёт биекцию грассманиана $\mathrm{Gr}(2, V)$ (т. е. множества всех прямых в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$) с *квадрикой Плюккера* $P = \{\omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0\} \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.

в) Покажите, что пересекая в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ квадрику Плюккера с квадрикой $\Lambda^2 g = 0$, мы получим в точности плюккеровы образы всех касательных прямых к квадрике $G \subset \mathbb{P}_3$.

г) Покажите, что два семейства прямых, живущих на квадрике $G \subset \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U_-, U_+))$, переходят при плюккеровом вложении в пару невырожденных плоских коник, которые вырезаются из P двумя дополнительными плоскостями $\Lambda_\pm = \mathbb{P}\left(S^2 U_\pm^* \otimes \Lambda^2 U_\mp\right)$, канонически вложенными в $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathrm{Hom}(U_-, U_+))$ по зад. А3◇1.

д) Убедитесь, что обе эти коники являются образами прямых $\mathbb{P}_1^\pm = \mathbb{P}(U_\pm)$ при квадратичном отображении Веронезе, т. е. мы имеем коммутативную диаграмму[1]:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(U_+) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"] & & \mathbb{P}(S^2U_+) \simeq \Lambda_+ \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}_1^+ \times \mathbb{P}_1^- \arrow[u, "\pi_+"'] \arrow[d, "\pi_-"'] \arrow[r, "\text{Сегре}", "\sim"'] & G \subset \mathbb{P}\mathrm{Hom}(U_-, U_+) \arrow[r, dashed, "\text{Плюккер}"] & P \subset \mathbb{P}\begin{pmatrix} \Lambda^2U_-^* \otimes S^2U_+ \\ \oplus \\ S^2U_-^* \otimes \Lambda^2 U_+ \end{pmatrix} \\
\mathbb{P}(U_-^*) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"'] & & \mathbb{P}(S^2U_-^*) \simeq \Lambda_- \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

А3◇3. Пусть $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$. Покажите, что ограничение канонической проекции $V^{*\otimes d} \xrightarrow{\sigma_d} S^d V^*$ на подпространство симметрических тензоров $\mathrm{Sym}^d V^* \subset V^{*\otimes d}$ является изоморфизмом и опишите базис пространства $\mathrm{Sym}^d V^*$, переходящий в стандартный базис пространства $S^d V^*$, состоящий из мономов $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$.

А3◇4. В условиях предыдущей задачи для данного однородного многочлена $f \in S^d V^*$ обозначим через $\widetilde{f} : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_d \longrightarrow \Bbbk$ симметричную d-линейную форму $\sigma_d^{-1}(f) \in \mathrm{Sym}^d V^*$, и для данного вектора $v \in V$ рассмотрим оператор $\partial_v \overset{\text{def}}{=} d \cdot \sigma_{d-1} \circ c_v \circ \sigma_d^{-1} : S^d V^* \longrightarrow S^{d-1} V^*$, определяемый из диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
V^{*\otimes d} \supset \mathrm{Sym}^d V^* \arrow[r, "c_v"] \arrow[d, "\sigma_d"'] & \mathrm{Sym}^{(d-1)} V^* \subset V^{*\otimes(d-1)} \arrow[d, "\sigma_{d-1}"] \\
S^d V^* \arrow[r, "\frac{1}{d}\,\partial_v"] & S^{d-1} V^*
\end{tikzcd}$$

верхняя стрелка которой есть свёртка $V^{*\otimes d} \xrightarrow{c_v} V^{*\otimes(d-1)}$ первого тензорного сомножителя с вектором v. Покажите, что: **а)** $\partial_v(f \cdot g) = \partial_v(f) \cdot g + f \cdot \partial_v(g)$ **б)** $\partial_v \partial_w = \partial_w \partial_v$

[1] отображение Плюккера показано пунктиром, поскольку переводит прямые в точки

в) $\frac{1}{k!}\,\partial_v^k f(w) = \binom{d}{k}\widetilde{f}(\underbrace{v,\,\dots\,,\,v}_{k},\,\underbrace{w,\,\dots\,,\,w}_{d-k}) = \frac{1}{(d-k)!}\,\partial_w^{d-k} f(v)$ **г)** $\partial_{\sum \alpha_i e_i} = \sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

д) $\widetilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_d) = \frac{1}{d!}\,\partial_{v_1}\partial_{v_1}\dots\partial_{v_d} f$ **е) (формула Тейлора)** $f(v+w) = \sum\limits_{k=0}^{d} \frac{1}{k!}\,\partial_v^k f(w)$

А3◇5. Установите для многочлена $\det(A)$ на пространстве $n\times n$-матриц разложение Тейлора: $\det(\lambda A + \mu B) = \sum\limits_{p+q=n} \lambda^p\mu^q \cdot \mathrm{tr}\,(\Lambda^p A \cdot \Lambda^q B^t) = \sum\limits_{p+q=n} \lambda^p\mu^q \cdot \sum\limits_{\substack{IJ:\\ \#I=\#J=p}} (-1)^{|I|+|J|} A_{IJ} B_{\widehat{I}\widehat{J}}$, где $\Lambda^p A$ и $\Lambda^q B$ суть внешние степени[2] матриц A и B.

А3◇6. Сформулируйте и решите аналог зад. А3◇3 для пространств грассмановых многочленов $\Lambda^d V^*$ и кососимметрических тензоров $\mathrm{Skew}^{\,d}(V^*) \subset V^{*\otimes d}$.

А3◇7. Сформулируйте и решите аналоги зад. А3◇3 (а)–(д) для грассмановых многочленов.

А3◇8* (грассманова экспонента). Над полем произвольной характеристики для каждого *разложимого* $\omega \in \Lambda^{2m}$ положим $e^{\omega} \overset{\text{def}}{=} 1+\omega$ и распространим это определение на всё пространство $\Lambda^{2m}V$ по правилу $e^{\sum \omega_i} = \prod e^{\omega_i}$. Покажите, что:

а) определение e^f корректно (не зависит ни от способа представления f в виде суммы разложимых мономов, ни от порядка расположения сомножителей в правой части);

б) экспоненциальное отображение $\Lambda^{\text{even}}V \hookrightarrow \Lambda^{\text{even}}V$ является инъективным гомоморфизмом из аддитивной группы всех чётных грассмановых многочленов в мультипликативную группу чётных грассмановых многочленов со свободным членом 1.

А3◇9*. Выполняется ли в условиях предыдущей задачи над полем характеристики нуль равенства: **а)** $\partial_v e^f = e^f \wedge \partial_v f$ **б)** $e^f = \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} f^{\wedge k}$

А3◇10. Существует ли комплексная 2×4-матрица, 2×2-миноры которой (выписанные в порядке возрастания абсолютной величины) суть **а)** $\{2,3,4,5,6,7\}$ **б)** $\{3,4,5,6,7,8\}$? Если да, приведите пример такой матрицы, если нет, объясните почему.

А3◇11* (соотношения Плюккера). Докажите эквивалентность следующих условий на грассманов многочлен[3] $\omega = \sum\limits_{i_1,\dots,i_m} a_{i_1\dots i_m} e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_m} \in \Lambda^m V$: **а)** $\forall\, v \in \mathrm{Span}(\omega)\quad \omega\wedge v = 0$

б) ω разложим[4]; **в)** $\forall\,\{i_1, i_2, \dots, i_{m-1}\} \subset \{1,\,2\,\dots\,,\,n\}\quad \left(\partial_{e_{i_1}}\partial_{e_{i_2}}\dots\partial_{e_{i_{m-1}}}\omega\right)\wedge\omega = 0$;

г) $\forall\,\{i_1, i_2, \dots, i_{m+1}\}, \{j_1, j_2, \dots, j_{m-1}\} \subset \{1,\,2\,\dots\,,\,n\}\quad \sum\limits_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu} a_{i_1\dots\widehat{i}_\nu\dots i_{m+1}} a_{i_\nu j_1\dots j_{m-1}} = 0$.

А3◇12* (пфаффиан). Для кососимметричной $m\times m$-матрицы $A = (a_{ij})$ чётного размера $m = 2n$ положим $\alpha = \frac{1}{2}\sum\limits_{ij} a_{ij}\, e_i\wedge e_j$ и $\mathrm{pf}(A) = \sum\limits_{\substack{\{1,2,\dots,m\}=\\ \{i_1,j_1\}\sqcup\dots\sqcup\{i_n,j_n\}}} \mathrm{sgn}(i_1 j_1\dots i_n j_n)\, a_{i_1 j_1}\dots a_{i_n j_n}$, где суммирование происходит по всевозможным разбиениям множества $\{1,\,2,\,\dots\,,\,m\}$ в неупорядоченное дизъюнктное объединение неупорядоченных пар, а $\mathrm{sgn}(i_1 j_1\dots i_n j_n)$ есть знак написанной перестановки чисел $\{1,\,2,\,\dots\,,\,m\}$. Выразите друг через друга $\alpha^{\wedge n}$, $\mathrm{pf}(A)$ и $\det(A)$.

---

[2] т. е. матрицы операторов, индуцированных операторами A и B на пространствах однородных грассмановых многочленов от базисных векторов степеней p и q соответственно; матричные элементы этих матриц суть миноры порядков p и q матриц A и B, занумерованные так, чтобы дополнительные миноры имели одинаковые номера

[3] мы считаем, что $e_1, e_2, \dots, e_m$ — некоторый базис в V, а коэффициенты $a_{i_1\dots i_m}$ *кососимметричны* по индексам $i_1, i_2, \dots, i_m$ (в частности, обращаются в нуль при совпадении каких-либо двух индексов)

[4] т. е. является произведением m линейных многочленов