4.1. Докажите, что если фундаментальная последовательность в метрическом пространстве имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.

Определение 4.1. Пусть X — нормированное пространство. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ векторов из X *абсолютно сходится*, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

4.2. Докажите, что нормированное пространство X полно тогда и только тогда, когда в нем каждый абсолютно сходящийся ряд сходится.

4.3. Пусть $\{X_i : i \in I\}$ — семейство нормированных пространств, и пусть X — их ℓ^p-сумма (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) или их c_0-сумма. Докажите, что X полно тогда и только тогда, когда полны все пространства X_i.

4.4. **1)** Докажите, что пространство $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ неполно для любого $p \in [1, +\infty]$ и что пространство $(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ неполно при $q > p$. **2)** Опишите пополнения этих пространств.

4.5. Докажите, что пространство $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ неполно для любого $p < +\infty$.

4.6. **1)** Докажите полноту пространства $C^n[a,b]$ относительно нормы

$$\|f\| = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \|f^{(k)}\|_\infty.$$

2) Полно ли это пространство относительно равномерной нормы?

4.7. Пусть (X, μ) — пространство с мерой и $1 \leqslant p < \infty$. Пользуясь следующей схемой, докажите, что пространство $L^p(X, \mu)$ полно.

1) Покажите, что достаточно доказать сходимость каждой последовательности (f_n), удовлетворяющей условию $\|f_{n+1} - f_n\| < 1/2^n$.
2) Пусть последовательность (f_n) такова, как в п.1. Рассмотрите последовательность $g_n = |f_1| + |f_2 - f_1| + \cdots + |f_n - f_{n-1}|$ и покажите, что последовательность (g_n^p) удовлетворяет условиям теоремы о монотонной сходимости. Выведите отсюда, что последовательность (g_n) сходится почти всюду.
3) Из п.2 выведите, что последовательность (f_n) сходится почти всюду к некоторой измеримой функции f.
4) Воспользуйтесь фундаментальностью последовательности (f_n) и покажите, что при фиксированном n последовательность $|f_n - f_m|^p$ $(m = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет условиям теоремы Фату.
5) Примените теорему Фату и покажите, что $f \in L^p(X, \mu)$ и $f_n \to f$ по L^p-норме.

4.8. Опишите пополнение пространства $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ при $p < \infty$.

4.9. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Докажите, что пространство $L^\infty(X, \mu)$ полно.

4.10. Пусть $\{X_i : i \in I\}$ — семейство банаховых пространств. Положим $X = (\bigoplus X_i)_\infty$ и обозначим через $p_i \colon X \to X_i$ проекцию на i-е слагаемое.
1) Докажите, что для любого банахова пространства Y и любого семейства ограниченных линейных операторов $T_i \colon Y \to X_i$, удовлетворяющего условию $\sup_i \|T_i\| < \infty$, существует единственный ограниченный линейный оператор $T \colon Y \to X$, такой, что $p_i \circ T = T_i$ для всех $i \in I$.
2) Выразите норму оператора T через нормы операторов T_i.
3) Постройте изометрический изоморфизм $\mathscr{B}(Y, (\bigoplus X_i)_\infty) \cong \bigoplus_\infty \mathscr{B}(Y, X_i)$.
4*) Интерпретируйте ℓ^∞-сумму как произведение в некоторой категории.

4.11. Пусть $\{X_i : i \in I\}$ — семейство банаховых пространств. Положим $X = (\bigoplus X_i)_1$ и обозначим через $j_i \colon X_i \to X$ вложение на i-е слагаемое.

1) Докажите, что для любого банахова пространства Y и любого семейства ограниченных линейных операторов $T_i \colon X_i \to Y$, удовлетворяющего условию $\sup_i \|T_i\| < \infty$, существует единственный ограниченный линейный оператор $T \colon X \to Y$, такой, что $T \circ j_i = T_i$ для всех $i \in I$.

2) Выразите норму оператора T через нормы операторов T_i.

3) Постройте изометрический изоморфизм $\mathscr{B}((\bigoplus X_i)_1, Y) \cong \bigoplus_\infty \mathscr{B}(X_i, Y)$.

4*) Интерпретируйте ℓ^1-сумму как копроизведение в некоторой категории.

4.12. Докажите, что в банаховом пространстве любая убывающая последовательность $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ замкнутых шаров имеет непустое пересечение (даже если радиусы шаров не стремятся к нулю).

4.13. Докажите, что традиционное определение пополнения нормированного пространства эквивалентно следующему. *Пополнением* нормированного пространства X называется пара

$$(\widetilde{X}, J \colon X \to \widetilde{X}),$$

состоящая из банахова пространства $\widetilde{X}$ и линейного сжатия $J \colon X \to \widetilde{X}$ (т.е. линейного оператора нормы $\leqslant 1$) и обладающая следующим универсальным свойством: для любой другой такой пары $(Y, T \colon X \to Y)$ существует единственное линейное сжатие $\tilde{T} \colon \widetilde{X} \to Y$, делающее следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, dashed, "\tilde{T}"] & Y \\
X \arrow[u, "J"] \arrow[ur, "T"'] &
\end{tikzcd}$$