Домашнее задание 4

Задача 1. Предположим, что преобразование Лежандра $\hat{f}$ от строго выпуклой достаточное число раз дифференцируемой функции f определено на всем $\mathbb{R}^n$. Докажите, что функция $\hat{f}$ тоже строго выпукла, и преобразование Леженждра от функции $\hat{f}$ совпадает с функцией f.

Задача 2. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, такое, что $\lambda U \subseteq U$ для всякого $\lambda > 0$. Функция $f : U \to \mathbb{R}$ называется *положительно-однородной степени* k, если

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_n)$$

для всякой точки $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и всякого числа $\lambda > 0$. Докажите теорему *Эйлера об однородных функциях*: если f — дифференцируемая положительно-однородная функция степени k, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf.$$

Задача 3. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $p = (p_1, \ldots, p_n)$. Координата x_1 называется *циклической* для гамильтониана $H(x, p)$, если H не содержит явной зависимости от x_1, то есть является функцией от $x_2, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$. Докажите, что если x_1 — циклическая координата, то соответствующий импульс p_1 сохрянается (то есть не зависит от времени для любой истинной траектории).