Математический анализ — II

Листок 3

1) Докажите, что для любых множеств A, B, C выполняется включение
$$A \vartriangle B \subseteq (A \vartriangle C) \cup (B \vartriangle C),$$
где через $\vartriangle$ обозначена операция симметрической разности. (Это включение можно понимать как аналог неравенства треугольника для «расстояния» $d(A, B) = A \vartriangle B$, принимающего значения не в числах, а в множествах.)
2) Докажите включения
   а) $(A_1 \cup A_2) \vartriangle (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2)$ («непрерывность» объединения);
   б) $(A_1 \cap A_2) \vartriangle (B_1 \cap B_2) \subseteq (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2)$ («непрерывность» пересечения);
   в) $(A_1 \setminus A_2) \vartriangle (B_1 \setminus B_2) \subseteq (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2)$ («непрерывность» разности множеств).
3) Является ли кольцом система множеств, замкнутая относительно операций
   а) объединения и пересечения?
   б) объединения и разности?
4) Является ли система всех промежутков (открытых, замкнутых и полуоткрытых) на прямой кольцом? полукольцом?
5) а) Обязательно ли прямое произведение полуколец множеств является полукольцом?
   б) Обязательно ли прямое произведение колец множеств является кольцом?
6)
7) Пусть S — полукольцо, $R(S)$ — порожденное им кольцо, а $R_\sigma(S)$ — порожденное S σ-кольцо.
   а) Докажите, что $R(S)$ состоит из всевозможных конечных дизъюнктных объединений элементов S.
   б) Можно ли дать аналогичное описание для $R_\sigma(S)$?
8) *Борелевская σ-алгебра* топологического пространства X — это σ-кольцо, порожденное всеми открытыми подмножествами в X. Докажите, что мощность борелевской σ-алгебры на прямой равна континууму.
9) Во всех последующих задачах речь идёт о подмножествах вещественной прямой, и под мерой имеется в виду мера Лебега. Через $m^*(A)$ обозначается внешняя мера множества A, а через $m(A)$ — мера Лебега. Найдите меру
   а) множества иррациональных чисел из отрезка $[0, 1]$;
   б) множества чисел из отрезка $[0, 1]$, в десятичной записи которых не встречается число 142857;
   в) множества чисел из отрезка $[0, 1]$, в десятичной записи цифра 1 встречается раньше, чем цифра 2.
10) Докажите, что борелевские множества измеримы по Лебегу.
11) Докажите, что любое измеримое множество на прямой является объединением борелевского множества и множества меры нуль.
12) *Внутренней мерой* множества $A \subseteq [0, 1]$ называется число $\mu_*(A) = 1 - \mu^*([0, 1] \setminus A)$.
    а) Докажите, что $\mu_*(A) \leqslant \mu^*(A)$.
    б) Докажите, что множество $A \subseteq [0, 1]$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда $\mu_*(A) = \mu^*(A)$.
13) Докажите, что мощность σ-алгебры всех измеримых подмножеств прямой больше континуума.
14) Докажите, что мощность множества классов эквивалентности измеримых подмножеств прямой (по отношению эквивалентности $A \sim B$ если $\mu(A \vartriangle B) = 0$) равна континууму.
15) Докажите, что в измеримом множестве положительной меры найдутся две точки, расстояние между которыми рационально.
16) Покажите, что любое множество положительной меры содержит неизмеримое подмножество.