Математический анализ — II

Листок 4

1) Пусть X — топологическое пространство. Покажите, что наименьшая σ-алгебра подмножеств в X, содержащая все замкнутые подмножества, совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств.
2) Покажите, что наименьшая σ-алгебра подмножеств в $\mathbb{R}$, содержащая все интервалы вида $[a, b)$, совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств.
3) Покажите, что наименьшая σ-алгебра подмножеств в $\mathbb{R}$, содержащая все интервалы вида $[a, b)$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств.
4) Пусть $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ — бесконечная возрастающая последовательность измеримых подмножеств в пространстве с мерой μ. Докажите, что $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
5) Пусть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ — бесконечная убывающая последовательность измеримых подмножеств в пространстве с мерой μ, и пусть $\mu(A_1) < +\infty$. Докажите, что $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$, и покажите, что условие $\mu(A_1) < +\infty$ отбросить нельзя.
6) Для $x \in (0, 1)$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $f_n(x)$ количество семерок среди первых n знаков после запятой в десятичной записи числа x. Докажите, что для почти всех $x \in (0, 1)$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x)/n) = 1/10$.
7) Пусть $E \subseteq [0, 1]$ — измеримое по Лебегу множество, обладающее тем свойством, что для всякого отрезка $[a, b] \subseteq [0, 1]$ имеем $\mu(E \cap [a, b]) = (b - a)\mu(E)$. Докажите, что $\mu(E)$ равна нулю или единице.
8) Для каждого $\varepsilon \in [0, 1]$ постройте измеримое подмножество $E \subseteq [0, 1]$, для которого $\overline{E} = [0, 1]$ и $\mu(E) = \varepsilon$.
9) Обязательно ли образ множества меры нуль под действием гомеоморфизма имеет меру нуль?
10) Обязательно ли образ измеримого множества под действием гомеоморфизма является измеримым множеством?
11) Постройте пример измеримого по Лебегу, но не борелевского множества. *Указание: используйте, что любое подмножество множества меры нуль измеримо.*
12) Постройте измеримое множество $S \subset [0, 1]$ такое, чтобы для любого интервала $U \subset [0, 1]$ было $\mu(U \cap S) > 0$ и $\mu(U \setminus S) > 0$.
13) Постройте нигде не плотное ограниченное совершенное множество положительной меры.
14) Докажите, что в каждом совершенном множестве есть совершенное подмножество меры нуль.
15) **(Признак Валле-Пуссена)** Докажите, что для измеримости ограниченного множества E необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало такое замкнутое подмножество $F \subset E$, что $\mu^*(E \setminus F) < \varepsilon$.
16) Пусть A и B — измеримые множества на отрезке $[0, 1]$. Обозначим через $A + B$ множество $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, и для каждого вещественного t обозначим через $t + B$ множество $\{t + b \mid b \in B\}$.
    а) Если A и B имеют положительную меру, то $A + B$ содержит ненулевой открытый интервал.
    б) Пусть $\mu(A) = \mu(B) = \frac{1}{4}$. Докажите, что найдётся t такое, что $\mu(A \cap (t + B)) > \frac{1}{1000}$.
    в) Докажите, что $\lim\limits_{t\to 0} \mu(A \cap (t + B)) = \mu(A \cap B)$.
17) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A \Delta (\frac{1}{n} + A)) = 0$ для всякого множества A конечной меры. Покажите на примере, что для множества бесконечной меры это неверно.
18) Пусть μ — конечная σ-аддитивная мера на полукольце $S \subseteq 2^X$, причем $X \in R(S)$. Определим на 2^X отношение эквивалентности, полагая $A \sim B$ если $\mu^*(A \bigtriangleup B) = 0$. Докажите, что множество классов эквивалентности подмножеств в X, снабженное расстоянием $d(A, B) = \mu^*(A \bigtriangleup B)$, представляет собой полное метрическое пространство.