А. Ю. Пирковский

# Функциональный анализ

# Лекция 3

## 3.1. Топологически инъективные и открытые операторы

Операторы, о которых пойдет речь ниже, являются функционально-аналитическими аналогами инъекций и сюръекций.

**Определение 3.1.** Пусть $X$ и $Y$ — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *топологически инъективным*, если он осуществляет гомеоморфизм между $X$ и $\operatorname{Im} T$. Если вдобавок $\operatorname{Im} T = Y$, то $T$ называется *топологическим изоморфизмом*.

**Предложение 3.1.** *Следующие свойства оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ эквивалентны:*

(i) *$T$ топологически инъективен;*
(ii) *существует такое $c > 0$, что $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ для всех $x \in X$* (это свойство оператора иногда называют *ограниченностью снизу*).

*Доказательство.* Положим $Y_0 = \operatorname{Im} T$ и рассмотрим оператор $T_0\colon X \to Y_0$, $T_0(x) = T(x)$. Заметим, что каждое из условий (i) и (ii) влечет за собой инъективность оператора $T$, т.е. биективность оператора $T_0$. Имеем следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \iff T_0^{-1} \text{ непрерывен } &\iff \exists C > 0 : \|T_0^{-1} y\| \leqslant C\|y\| \ \forall y \in Y_0 \\
&\iff \exists C > 0 : \|x\| \leqslant C\|Tx\| \ \forall x \in X \\
&\iff \text{ выполнено (ii) с константой } c = 1/C. \qquad \square
\end{aligned}$$

**Определение 3.2.** Пусть $X$ и $Y$ — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *открытым*, если для любого открытого множества $U \subset X$ множество $T(U)$ открыто в $Y$.

**Предложение 3.2.** *Следующие свойства линейного оператора $T\colon X \to Y$ эквивалентны:*

(i) *$T$ открыт;*
(ii) *$T(\mathbb{B}_1^\circ) \supset \mathbb{B}_r^\circ$ для некоторого $r > 0$;*
(iii) *существует такое $C > 0$, что для каждого $y \in Y$ найдется такой $x \in X$, что $Tx = y$ и $\|x\| \leqslant C\|y\|$.*

*Доказательство.* (i) $\Longrightarrow$ (ii): очевидно.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Зафиксируем $y \in Y$, $y \neq 0$, и положим $y' = (r/2\|y\|)\, y$. Очевидно, $y' \in \mathbb{B}_{r,Y}^\circ$, поэтому $y' = Tx'$ для некоторого $x' \in \mathbb{B}_{1,X}^\circ$. Положим $x = (2\|y\|/r)\, x'$; тогда $Tx = y$ и $\|x\| \leqslant (2/r)\|y\|$. Ясно, что для $y = 0$ свойство (iii) также выполнено.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): очевидно (достаточно положить $r = 1/C$).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Пусть $U \subset X$ — открытое подмножество и $x \in U$. Достаточно показать, что $Tx$ — внутренняя точка множества $T(U)$. Подберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $x + \varepsilon\mathbb{B}_1^\circ \subset U$; тогда $T(U) \supset Tx + \varepsilon T(\mathbb{B}_1^\circ) \supset Tx + \mathbb{B}_{\varepsilon r}^\circ$, так что $Tx$ — внутренняя точка $T(U)$. $\square$

**Следствие 3.3.** *Открытый линейный оператор между нормированными пространствами сюръективен.*

Разумеется, понятия топологически инъективного и открытого операторов — чисто топологические в том смысле, что они имеют смысл для любых отображений между топологическими пространствами. Введем теперь метрические аналоги этих понятий. С первым из них мы с вами, в сущности, уже встречались.

**Определение 3.3.** Пусть $X$ и $Y$ — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *изометрическим*, если $\|Tx\| = \|x\|$ для всех $x \in X$. Если вдобавок $\operatorname{Im} T = Y$, то $T$ называется *изометрическим изоморфизмом.*

Из предложения 3.1 следует, что изометрический оператор топологически инъективен.

**Пример 3.1.** Все операторы сдвига из примера 2.3, кроме оператора левого сдвига $T_\ell$, изометричны.

**Определение 3.4.** Пусть $X$ и $Y$ — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *коизометрическим*, если $T(\mathbb{B}^\circ_{1,X}) = \mathbb{B}^\circ_{1,Y}$.

Из предложения 3.2 следует, что коизометрический оператор открыт.

**Пример 3.2.** Все операторы сдвига из примера 2.3, кроме оператора правого сдвига $T_r$, коизометричны. В самом деле, операторы сдвига в функциональных пространствах на $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{T}$ — изометрические изоморфизмы, поэтому они не только изометричны, но и коизометричны. Коизометричность оператора левого сдвига легко проверяется (проверьте!).

**Замечание 3.1** (*для знакомых с языком категорий*)**.** Операторы, о которых шла речь выше, можно интерпретировать в терминах теории категорий. А именно, рассмотрим категорию $\mathscr{N}orm$, объектами которой являются нормированные пространства, а морфизмами — ограниченные линейные операторы. Тогда изоморфизмы в этой категории — это в точности топологические изоморфизмы, мономорфизмы — инъективные операторы, эпиморфизмы — операторы с плотным образом, строгие мономорфизмы — топологически инъективные операторы с замкнутым образом и строгие эпиморфизмы — открытые операторы. Рассмотрим теперь еще одну категорию $\mathscr{N}orm_1$, объекты которой — это по-прежнему нормированные пространства, а морфизмы — *линейные сжатия*, т.е. линейные операторы $T$ со свойством $\|T\| \leqslant 1$. Тогда изоморфизмы в этой категории — это в точности изометрические изоморфизмы, мономорфизмы — инъективные операторы, эпиморфизмы — операторы с плотным образом, строгие мономорфизмы — изометрические операторы с замкнутым образом и строгие эпиморфизмы — коизометрические операторы. Попробуйте доказать все эти утверждения (прочитав сперва параграф о факторпространствах; см. ниже).

## 3.2. Основные конструкции нормированных пространств

### 3.2.1. $\ell^p$-суммы и $c_0$-суммы

Пусть $X$ и $Y$ — нормированные пространства. Зафиксируем $p \in [1, +\infty)$ и для каждого вектора $(x, y) \in X \oplus Y$ положим

$$\|(x, y)\|_p = \big(\|x\|^p + \|y\|^p\big)^{1/p}.$$

Из неравенства Минковского следует, что $\|\cdot\|_p$ — норма на $X \oplus Y$. Введем также норму $\|\cdot\|_\infty$ на $X \oplus Y$, полагая

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

**Определение 3.5.** Пространство $X \oplus Y$, снабженное нормой $\|\cdot\|_p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$), называется *$\ell^p$-суммой* пространств $X$ и $Y$ и обозначается через $X \oplus_p Y$.

**Замечание 3.2.** Из задачи 1.2 следует, что нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на $X \oplus Y$ эквивалентны для всех $p, q$.

Точно так же определяется $\ell^p$-сумма любого конечного числа нормированных пространств. Чтобы определить $\ell^p$-сумму бесконечного семейства пространств, введем следующее понятие.

Пусть $I$ — произвольное множество и $\mathrm{Fin}(I)$ — семейство всех его конечных подмножеств.

**Определение 3.6.** Семейство $(a_i)_{i \in I}$ неотрицательных чисел называется *суммируемым*, если

$$\sup_{J \in \mathrm{Fin}(I)} \sum_{i \in J} a_i < \infty.$$

Величина, фигурирующая в предыдущей формуле, называется *суммой* этого семейства и обозначается через $\sum_{i \in I} a_i$.

**Упражнение 3.1.** Покажите, что семейство $(a_i)_{i \in I}$ неотрицательных чисел суммируемо тогда и только тогда, когда множество $S = \{i \in I : a_i > 0\}$ не более чем счетно, причем если оно счетно, то ряд $\sum_{i \in S} a_i$ сходится при какой-либо (или, что эквивалентно, при любой) нумерации множества $S$.

**Определение 3.7.** Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — семейство нормированных пространств.

(i) Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Положим

$$\Big(\bigoplus_{i \in I} X_i\Big)_p = \Big\{x = (x_i) \in \prod_{i \in I} X_i : \sum_{i \in I} \|x_i\|^p < \infty\Big\}.$$

Из неравенства Минковского следует, что $(\bigoplus X_i)_p$ — векторное подпространство в $\prod X_i$, и что формула

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i \in I} \|x_i\|^p\right)^{1/p}$$

задает норму на $(\bigoplus X_i)_p$. Полученное нормированное пространство $(\bigoplus X_i)_p$ называется *$\ell^p$-суммой* семейства $(X_i)$.

(ii) Положим
$$\Big(\bigoplus_{i\in I} X_i\Big)_\infty = \Big\{x=(x_i)\in \prod_{i\in I} X_i : \sup_{i\in I}\|x_i\|<\infty\Big\}.$$
Очевидно, что $(\bigoplus X_i)_\infty$ — векторное подпространство в $\prod X_i$, и что оно является нормированным пространством относительно нормы
$$\|x\|_\infty = \sup_{i\in I}\|x_i\|.$$
Полученное нормированное пространство $(\bigoplus X_i)_\infty$ называется $\ell^\infty$-*суммой* семейства $(X_i)$.

(iii) Положим
$$\Big(\bigoplus_{i\in I} X_i\Big)_0 = \Big\{x=(x_i)\in \prod_{i\in I} X_i : \text{функция } i\mapsto\|x_i\| \text{ исчезает на бесконечности}\Big\}.$$
Очевидно, $(\bigoplus X_i)_0$ — векторное подпространство в $(\bigoplus X_i)_\infty$, поэтому оно является нормированным пространством относительно нормы $\|\cdot\|_\infty$. Это пространство называется $c_0$-*суммой* семейства $(X_i)$.

Если $X_i=\mathbb{K}$ для всех $i\in I$, то пространство $(\bigoplus X_i)_p$ обозначается через $\ell^p(I)$, а пространство $(\bigoplus X_i)_0$ — через $c_0(I)$. Отметим, что $\ell^p(\mathbb{N})=\ell^p$ и $c_0(\mathbb{N})=c_0$.

### 3.2.2. Факторпространства

Пусть $X$ — нормированное пространство и $X_0\subset X$ — векторное подпространство. Наша ближайшая цель будет состоять в том, чтобы ввести норму на факторпространстве $X/X_0$.

Обозначим через $Q\colon X\to X/X_0$ факторотображение, т.е. отображение, действующее по правилу $x\mapsto x+X_0$. Естественно попытаться ввести норму на $X/X_0$ таким образом, чтобы $Q$ было ограничено. Заметим, что если такая норма существует, то $X_0$ должно быть замкнутым; в самом деле, $X_0=\operatorname{Ker}Q=Q^{-1}(\{0\})$, а прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении замкнут.

Оказывается, верно и обратное: если $X_0$ замкнуто в $X$, то на $X/X_0$ есть норма с нужным нам свойством. На самом деле таких норм много, но среди них есть одна, которая «лучше всех»; ее-то мы и построим.

Для каждого $u\in X/X_0$ положим
$$\|u\|^\wedge = \inf\{\|z\| : z\in Q^{-1}(u)\}. \tag{3.1}$$
Эквивалентно,
$$\|x+X_0\|^\wedge = \inf\{\|x+y\| : y\in X_0\}. \tag{3.2}$$
Заменяя в формуле (3.2) $y$ на $-y$, видим, что величина $\|x+X_0\|$ равна расстоянию $\rho(x,X_0)$ от $x$ до $X_0$.

**Предложение 3.4.** *Функция $\|\cdot\|^\wedge$ — полунорма на $X/X_0$.*

Докажите это предложение сами в качестве упражнения.

**Предложение 3.5.** *Функция* $\|\cdot\|^\wedge$ *— норма* $\iff$ $X_0$ *замкнуто в* $X$.

*Доказательство.* Функция $\|\cdot\|^\wedge$ является нормой на $X/X_0$ тогда и только тогда, когда $\|x+X_0\| > 0$ для всех $x \in X \setminus X_0$. Поскольку $\|x+X_0\| = \rho(x, X_0)$ (см. выше), положительность этого числа для всех $x \in X \setminus X_0$ равносильна замкнутости $X_0$. □

**Определение 3.8.** В случае замкнутого подпространства $X_0 \subset X$ построенная выше норма $\|\cdot\|^\wedge$ называется *факторнормой* нормы $\|\cdot\|$ на $X$. Факторпространство $X/X_0$ по умолчанию снабжается этой нормой.

**Предложение 3.6.** *Пусть* $X$ *— нормированное пространство и* $X_0 \subset X$ *— замкнутое векторное подпространство. Тогда факторотображение* $Q\colon X \to X/X_0$ *коизометрично.*

*Доказательство.* Из (3.2) следует, что $\|x+X_0\|^\wedge \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X$; стало быть, $Q(\mathbb{B}^\circ_{1,X}) \subset \mathbb{B}^\circ_{1,X/X_0}$. Обратно, пусть $u \in \mathbb{B}^\circ_{1,X/X_0}$, т.е. $\|u\| < 1$. Тогда из (3.1) получаем, что $u = Q(z)$ для некоторого $z \in X$, $\|z\| < 1$. Следовательно, $Q(\mathbb{B}^\circ_{1,X}) = \mathbb{B}^\circ_{1,X/X_0}$, т.е. $Q$ коизометрично. □

**Замечание 3.3.** Поскольку факторотображение $Q$ коизометрично, оно открыто. Отсюда нетрудно вывести (сделайте это), что топология на $X/X_0$ — это в точности фактортопология топологии на $X$; иными словами, подмножество $U \subset X/X_0$ открыто тогда и только тогда, когда множество $Q^{-1}(U)$ открыто в $X$.

Теперь мы можем ответить на вопрос, почему факторнорма — это наиболее «правильная» норма на $X/X_0$. Дело в том, что факторпространство $X/X_0$, снабженное этой нормой, обладает следующим универсальным свойством, полностью его характеризующим.

**Теорема 3.7.** *Пусть* $X$ *— нормированное пространство,* $X_0 \subset X$ *— замкнутое подпространство,* $Q\colon X \to X/X_0$ *— факторотображение. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *Для каждого нормированного пространства* $Y$ *и каждого оператора* $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, *удовлетворяющего условию* $T(X_0) = 0$, *существует единственный оператор* $\widehat{T} \in \mathscr{B}(X/X_0, Y)$, *делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & Y \\ X/X_0 \arrow[ur, dashed, "\widehat{T}"'] & \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

(ii) *при этом* $\|\widehat{T}\| = \|T\|$;

(iii) $\widehat{T}$ *открыт* $\iff$ $T$ *открыт;*

(iv) $\widehat{T}$ *коизометричен* $\iff$ $T$ *коизометричен.*

*Доказательство.* (i) Существование и единственность линейного оператора $\widehat{T}$, делающего диаграмму (3.3) коммутативной, известны из курса алгебры. Докажем его ограниченность. Из коммутативности диаграммы и условия $T(X_0) = 0$ получаем, что для любых $x \in X$ и $y \in X_0$ справедливы равенства

$$\widehat{T}(x + X_0) = T(x) = T(x+y),$$

и, следовательно,
$$\|\widehat{T}(x+X_0)\| = \|T(x+y)\| \leqslant \|T\|\|x+y\|.$$
Беря inf по всем $y \in X_0$, получаем неравенство
$$\|\widehat{T}(x+X_0)\| \leqslant \|T\|\|x+X_0\|^{\wedge}.$$
Следовательно, оператор $\widehat{T}$ ограничен, причем $\|\widehat{T}\| \leqslant \|T\|$.

(ii) Если $X/X_0 \neq 0$ (т.е. $X \neq X_0$), то $\|Q\| = 1$, т.к. $Q$ — коизометрия. Следовательно,
$$\|T\| = \|\widehat{T}Q\| \leqslant \|\widehat{T}\|\|Q\| = \|\widehat{T}\|.$$
Вместе с уже доказанной оценкой $\|\widehat{T}\| \leqslant \|T\|$ это дает нужное равенство $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. При $X/X_0 = 0$ это равенство также справедливо по очевидным причинам.

(iii), (iv) Поскольку $Q$ коизометрично, имеет место равенство $\widehat{T}(\mathbb{B}^\circ_{1,X/X_0}) = T(\mathbb{B}^\circ_{1,X})$. Из него понятным образом следует как (iii), так и (iv). □

Утверждения (i) и (ii) доказанной теоремы (именно они и составляют вышеупомянутое «универсальное свойство») можно по-другому сформулировать так:

**Теорема 3.8.** *Для любого нормированного пространства $Y$ отображение*
$$\mathscr{B}(X/X_0, Y) \to \big\{T \in \mathscr{B}(X,Y) \,:\, T(X_0) = 0\big\} \subset \mathscr{B}(X,Y), \quad S \mapsto S \circ Q,$$
*является изометрическим изоморфизмом.*

**Следствие 3.9.** *Пусть $X$ и $Y$ — нормированные пространства, $X_0 \subset X$ и $Y_0 \subset Y$ — замкнутые подпространства, $Q_X \colon X \to X/X_0$ и $Q_Y \colon Y \to Y/Y_0$ — соответствующие фактороотображения. Тогда для каждого оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, удовлетворяющего условию $T(X_0) \subset Y_0$, существует единственный оператор $\bar{T} \in \mathscr{B}(X/X_0, Y/Y_0)$, делающий следующую диаграмму коммутативной:*
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q_X"'] & Y \arrow[d, "Q_Y"] \\ X/X_0 \arrow[r, dashed, "\bar{T}"'] & Y/Y_0 \end{tikzcd}$$
*При этом $\|\bar{T}\| \leqslant \|T\|$.*

*Доказательство.* Достаточно применить теорему 3.7 к оператору $Q_Y T$. □

**Следствие 3.10.** *Пусть $X$ и $Y$ — нормированные пространства и $T \in \mathscr{B}(X,Y)$. Тогда*

(i) *существует единственный оператор $\widehat{T} \in \mathscr{B}(X/\operatorname{Ker} T, Y)$, делающий следующую диаграмму коммутативной:*
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "Q"'] & Y \\ X/\operatorname{Ker} T \arrow[ur, dashed, "\widehat{T}"'] & \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

(ii) $\widehat{T}$ — *топологический изоморфизм* $\iff$ $T$ *открыт;*
(iii) $\widehat{T}$ — *изометрический изоморфизм* $\iff$ $T$ *коизометричен.*

*Доказательство.* Заметим, что $\operatorname{Ker}\widehat{T} = 0$. Поэтому все утверждения следуют из теоремы 3.7 с учетом того, что инъективный оператор $\widehat{T}$ является топологическим (соответственно, изометрическим) изоморфизмом тогда и только тогда, когда он открыт (соответственно, коизометричен). $\square$

**Упражнение 3.2** (*для знакомых с языком категорий*)**.** (i) Интерпретируйте пару $(X/X_0, Q)$ как инициальный объект некоторой категории.

(ii) Интерпретируйте $X/X_0$ как представляющий объект некоторого функтора.

(iii) Докажите, что в категориях $\mathscr{N}orm$ и $\mathscr{N}orm_1$ (см. замечание 3.1) каждый морфизм имеет ядро и коядро.