Математический анализ — II

Листок 5

1) Пусть X — пространство с мерой. Докажите, что следующие свойства функции $f : X \to \mathbb{R}$ эквивалентны:
   а) Для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ измеримо.
   б) Для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ измеримо.
   в) Для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X \mid f(x) \geqslant a\}$ измеримо.
   г) Для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X \mid f(x) \leqslant a\}$ измеримо.
   д) Для любого борелевского подмножества $B \subseteq \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(B)$ измеримо.
2) Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ измерима.
   а) Докажите, что функция $|f|$ измерима.
   б) Докажите, что функция $1/f$ измерима (предполагаем, что f не обращается в 0).
3) Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, а функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима.
   а) Докажите, что функция $f \circ g$ измерима.
   б) Обязательно ли функция $g \circ f$ измерима?
4) Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — всюду дифференцируемая функция. Докажите, что функция f' измерима по Лебегу.
5) Пусть $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, и пусть $n(c)$ — число решений уравнения $f(x) = c$. Докажите, что функция $n(c)$ измерима по Лебегу.
6) Пусть (f_n) — последовательность измеримых функций.
   а) Докажите, что функции $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ и $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ измеримы.
   б) Докажите, что функции $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ измеримы.
   в) Докажите, что множество тех точек, в которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$, измеримо.
7) Функция $f : X \to V$ со значениями в конечномерном векторном пространстве V называется измеримой, если координаты вектора $f(x)$ относительно базиса пространства V являются измеримыми функциями. Докажите, что это определение не зависит от выбора базиса.
8) Докажите, что если две непрерывные функции на отрезке эквивалентны (то есть совпадают вне множества меры нуль), то они тождественно равны.
9) Постройте измеримую по Лебегу функцию на отрезке, не эквивалентную никакой непрерывной функции.
10) Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *борелевской*, если прообраз $f^{-1}(B)$ любого борелевского множества B является борелевским множеством. Докажите, что любая измеримая по Лебегу функция эквивалентна некоторой борелевской функция.
11) Функция называется *простой*, если множество ее значений не более чем счетно.
    а) Докажите, что простая функция $f : X \to \mathbb{R}$ измерима тогда и только тогда, когда измеримы все ее *множества уровня* $L_c(f) = f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$.
    б) Докажите, что каждая измеримая функция представляется как равномерный предел измеримых простых функций.
12) Пусть $f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2}$. Докажите, что эта последовательность всюду на $\mathbb{R}$ сходится к нулю, но не равномерно.
13) Пусть $f_n(x) = \frac{n \sin x}{1+n^2 \sin^2 x}$ на отрезке $[0, \pi]$. Для каждого $\delta > 0$ укажите явно *множество Егорова* E_δ меры меньшей δ, вне которого последовательность f_n сходится равномерно.
14) Пусть последовательность функций f_n сходится по мере μ. Докажите, что предел по мере этой последовательности определен однозначно с точностью до эквивалентности по мере μ.
15) Занумеруем все рациональные числа на отрезке $[0, 1]$ натуральными числами и запишем n-е число в виде несократимой дроби $r_n = p_n/q_n$. Положим $f_n(x) = e^{-(p_n - q_n x)^2}$. Докажите, что $f_n \to 0$ по мере Лебега на отрезке $[0, 1]$, но $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ не существует ни в какой точке отрезка.
16) **(Теорема Лузина)** Докажите, что функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ измерима тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти непрерывную функцию, отличающуюся от f на множестве меры $\leqslant \varepsilon$.