# Симметрические функции

**Обозначения.** В $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $h_k$ равным сумме всех мономов степени $k$, $e_k$ — сумме всех полилинейных мономов степени $k$, и $p_k$ — сумме $k$-тых степеней всех переменных. Для $m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ положим $h_m = h_{m_1} h_{m_2} \dots h_{m_n}$, $e_m = h_{m_1} h_{m_2} \dots h_{m_n}$, $p_m = h_{m_1} h_{m_2} \dots h_{m_n}$. Для каждой диаграммы Юнга $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ положим $m_\lambda$ равным сумме всех различных мономов, получающихся из $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$ перестановками номеров переменных, $\Delta_\lambda = \det\left(x_j^{n-i+\lambda_i}\right)$ (определитель[1], получающийся из вандермондовского $\Delta_0 = \det(x_j^{n-i}) = \prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$ увеличением показателя в $i$-той строке на $\lambda_i$), и $s_\lambda = \Delta_\lambda / \Delta_0$.

**А4◇1.** Покажите, что $e_\lambda = m_{\lambda^t} + \sum\limits_{\mu < \lambda^t} a_{\lambda\mu} m_\mu$, где $a_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}$, $\lambda$ и $\lambda^t$ — транспонированные диаграммы Юнга, а сумма идёт по диаграммам $\mu$, лексикографически меньшим, чем $\lambda$, и выведите отсюда, что многочлены $e_\lambda$ составляют базис модуля симметрических многочленов.

**А4◇2.** Выразите **а)** $\sum\limits_{i \neq j \neq k \neq i} x_i(x_j + x_k)/2$ **б)** $(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_4)(x_1+x_3)(x_2+x_4)(x_1+x_4)$ **в)** $\sum\limits_{i \neq j} x_i^2 x_j$ **г)** $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$ через $e_i$.

**А4◇3.** Выразите дискриминант[2] $D_f$ кубического трёхчлена $f = x^3 + px + q$ через $p$ и $q$.

**А4◇4.** Пусть в зад. А4◇3 $p, q \in \mathbb{R}$. Покажите, что при $D_f < 0$ у $f$ есть ровно один вещественный корень, а при $D_f > 0$ — ровно три, и в этом случае уравнение $f = 0$ перескалированием переменной приводится к виду $4t^3 - 3t = a$ и решается в тригонометрических функциях.

**А4◇5.** Многочлен $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ имеет корни $x_1, x_2, \dots, x_n$. Верно ли, что любой симметрический многочлен от $x_2, \dots, x_n$ переписывается в виде многочлена от $x_1$?

**А4◇6.** Напишите рекуррентные формулы, выражающие **а)** $h_k$ **б)** $p_k$ через $e_k$.

**А4◇7.** Обозначим через $\zeta \in \mathbb{C}$ какой-нибудь первообразный корень $m$-той степени из единицы. Для каждого $a \in \mathbb{C}$ раскройте скобки и приведите подобные в $\prod\limits_{\nu=1}^{m}(a - \zeta^{\nu-1}x)$, покажите, что $\forall f \in \mathbb{C}[x]\ \exists h \in \mathbb{C}[x]$: $\prod\limits_{\nu=1}^{m} f(\zeta^{\nu-1}x) = h(x^m)$ и выразите корни многочлена $h$ через корни многочлена $f$.

**А4◇8.** Найдите в $\mathbb{C}[x]$ многочлен 4-й степени, корнями которого являются
**а)** квадраты всех комплексных корней многочлена $x^4 + 2x^3 - x + 3$
**б)** кубы всех комплексных корней многочлена $x^4 - x - 1$.

**А4◇9.** Покажите, что $s_\lambda$ — симметрические многочлены[3], выразите **а)** $s_{(1^n)}$ через $e_\nu$ **б*)** $s_{(n)}$ через $h_\nu$. Представьте **в)** $s_{(1)}^2$ **г)** $s_{(1,1)} \cdot s_{(2)}$ в виде линейной комбинации многочленов $s_\lambda$ с целыми коэффициентами.

**А4◇10.** Пусть $h_0 = e_0 = 1$ и $h_k = e_k = 0$ при $k < 0$. Покажите, что матрицы $(h_{i-j})$ и $\left((-1)^{i-j} e_{i-j}\right)$ обратны друг другу и получите отсюда соотношение $\det(h_{\lambda_i + j - i}) = \det\left(e_{\lambda_i^t + j - i}\right)$ на дополнительные миноры этих матриц.

**А4◇11*.** Обозначим через $e_k^{\hat{j}}$ элементарный симметрический многочлен от всех $x_\nu$ с $\nu \neq j$, образуем $n \times n$-матрицу $M = \left((-1)^{n-i} e_{n-i}^{\hat{j}}\right)$, и для каждого $m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ рассмотрим матрицы $X_m = \left(x_j^{m_i}\right)$ и $H_m = (h_{m_i - n + j})$. Покажите, что: **а)** $H_m \cdot M = X_m$ **б)** $\det M = \Delta_0$ **в)** $\Delta_0 \det H_\lambda = \Delta_\lambda$ **г)** $s_\lambda = \det(h_{j-i+\lambda_i})$ **д)** $s_\lambda = \det\left(e_{j-i+\lambda_i^t}\right)$

[1] здесь и далее в скобках указаны правила формирования элемента $i$-той строки и $j$-того столбца $n \times n$-матрицы

[2] напомним, что *дискриминантом* приведённого многочлена $f(x) = \prod\limits_{i=1}^{\deg f}(x - x_i)$ называется произведение квадратов разностей всех его корней $D_f = \Delta_0^2 = \prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)^2$

[3] они называются *полиномами Шура*