

5.1. Пусть f — полуторалинейная форма на векторном пространстве H . Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, и пусть $\zeta \in \mathbb{C}$ — корень из 1 степени n , $\zeta \neq \pm 1$. Докажите *тождество поляризации*:

$$f(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k f(x + \zeta^k y, x + \zeta^k y).$$

5.2. Докажите, что неравенство Коши–Буняковского–Шварца $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ в предгильбертовом пространстве H обращается в равенство лишь тогда, когда векторы $x, y \in H$ пропорциональны.

5.3. Докажите, что предгильбертово пространство — строго нормированное (см. листок 2).

5.4. Пусть H — предгильбертово пространство. Докажите, что скалярное произведение непрерывно как функция на $H \times H$.

5.5. Докажите, что в любом предгильбертовом пространстве справедливо *тождество параллелограмма*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

5.6. Покажите, что норма на пространствах $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, ℓ^p , $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$, $L^p(X, \mu)$ (где (X, μ) — пространство с мерой, содержащее хотя бы два непустых измеримых подмножества) при $p \neq 2$ и $n > 1$ не порождается никаким скалярным произведением.

5.7. Придумайте обобщение тождества параллелограмма на случай n векторов.

5.8. Покажите, что норма на пространствах ℓ^p , $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$, $L^p(X, \mu)$ (где (X, μ) — пространство с мерой, содержащее бесконечно много измеримых подмножеств) при $p \neq 2$ не эквивалентна никакой норме, порожденной скалярным произведением.

5.9* (*теорема фон Нойманна–Йордана*). Пусть H — нормированное пространство, в котором выполняется тождество параллелограмма. Покажите, что формула

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2 \quad (x, y \in H)$$

задает скалярное произведение на H , и что норма, порожденная этим скалярным произведением, совпадает с исходной.

5.10. 1) Постройте пример предгильбертова пространства H и замкнутого векторного подпространства $H_0 \subset H$, для которых $H_0 \oplus H_0^\perp \neq H$.

2) Покажите, что такое подпространство H_0 есть в любом неполном предгильбертовом пространстве.