А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ

Лекция 4

4.1. Банаховы пространства

Напомним, что последовательность (x_n) в метрическом пространстве (X, ρ) называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m > N$. Каждая сходящаяся последовательность фундаментальна, но обратное в общем случае неверно. Метрические пространства, в которых всякая фундаментальная последовательность сходится, называются *полными.*

Определение 4.1. Нормированное пространство называется *банаховым*, если оно полно относительно метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Пример 4.1. В курсе классического анализа доказывается, что $\mathbb{R}$ полно (критерий Коши), а также что $\mathbb{R}^n_2 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ полно. Отождествляя стандартным образом $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$, видим, что и $\mathbb{C}^n_2 = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ полно.

Как и раньше, обозначим через $\mathbb{K}$ любое из полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, и будем рассматривать нормированные пространства над $\mathbb{K}$. Будет ли $\mathbb{K}^n$ банаховым пространством, если снабдить его какой-нибудь нормой, отличной от евклидовой нормы $\|\cdot\|_2$? Чтобы ответить на этот вопрос, сделаем следующее несложное наблюдение.

Предложение 4.1. *Пусть X и Y — нормированные пространства.*

(i) *Если (x_n) — фундаментальная последовательность в X, то (Tx_n) — фундаментальная последовательность в Y для любого $T \in \mathscr{B}(X, Y)$.*
(ii) *Если X и Y топологически изоморфны и X полно, то и Y полно.*

Доказательство. Утверждение (i) следует из оценки $\|Tx_n - Tx_m\| \leqslant \|T\|\|x_n - x_m\|$. Чтобы доказать утверждение (ii), достаточно заметить, что топологический изоморфизм устанавливает биекцию между классами сходящихся последовательностей в X и Y. В силу (i), он же устанавливает биекцию между классами фундаментальных последовательностей в X и Y. Дальше ясно. □

Отметим, что при произвольных гомеоморфизмах метрических пространств полнота сохраняться вовсе не обязана (приведите пример!).

Следствие 4.2. *Если $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ — эквивалентные нормы на векторном пространстве X и $(X, \|\cdot\|')$ полно, то и $(X, \|\cdot\|'')$ полно.*

Следствие 4.3. *Конечномерное векторное пространство полно относительно любой нормы.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться предложением 2.4 и примером 4.1. □

Напомним следующий несложный факт (если вы с ним незнакомы, обязательно докажите его в качестве упражнения).

Предложение 4.4. *Пусть X — метрическое пространство и $Y \subset X$.*

(i) *Если X полно и Y замкнуто в X, то Y полно.*
(ii) *Если Y полно, то Y замкнуто в X.*

Объединяя этот факт со следствием 4.3, получаем следующее.

Следствие 4.5. *Конечномерное векторное подпространство нормированного пространства замкнуто.*

Вернемся к примерам банаховых пространств. Следующий пример знаком вам из курса анализа.

Пример 4.2. $\ell^\infty(S)$ — банахово пространство для любого множества S.

Поскольку предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций также является непрерывной функцией (см. курс анализа), получаем следующий пример.

Пример 4.3. Для любого топологического пространства X пространство $C_b(X)$ замкнуто в $\ell^\infty(X)$ и является, следовательно, банаховым пространством.

Упражнение 4.1. Для любого топологического пространства X пространство $C_0(X)$ замкнуто в $C_b(X)$ и является, следовательно, банаховым пространством. В частности, $c_0 = C_0(\mathbb{N})$ — банахово пространство.

Теорема 4.6. *Пространство ℓ^p полно для любого $p \in [1, +\infty]$.*

Доказательство. Полнота пространства ℓ^∞ нам уже известна (см. выше), поэтому будем считать, что $p < \infty$. Пусть $(x^{(n)})$ — фундаментальная последовательность в ℓ^p, где $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$ и заметим, что $|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| \leqslant \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$. Следовательно, числовая последовательность $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна и поэтому сходится. Обозначим ее предел через a_k; в итоге получим числовую последовательность $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$, к которой последовательность $x^{(n)}$ сходится покоординатно. Осталось показать, что $a \in \ell^p$ и $x^{(n)} \to a$ по норме пространства ℓ^p.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p \leqslant \varepsilon$ для всех $n, m > N$. Тогда для каждого $K \in \mathbb{N}$ и всех $n, m > N$ будет выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{K} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p \leqslant \varepsilon^p. \tag{4.1}$$

Зафиксируем произвольные $K \in \mathbb{N}$ и $n > N$ и перейдем в (4.1) к пределу при $m \to \infty$. Получим неравенство

$$\sum_{i=1}^{K} |x_i^{(n)} - a_i|^p \leqslant \varepsilon^p.$$

Поскольку оно справедливо для всех $K \in \mathbb{N}$, мы заключаем, что ряд $\sum_i |x_i^{(n)} - a_i|^p$ сходится, причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - a_i|^p \leqslant \varepsilon^p. \tag{4.2}$$

Отсюда, в частности, следует, что $x^{(n)} - a \in \ell^p$, а значит, и $a \in \ell^p$. Теперь заметим, что неравенство (4.2) означает в точности, что $\|x^{(n)} - a\|_p \leqslant \varepsilon$, причем оно справедливо для всех $n > N$. Следовательно, $x^{(n)} \to a$ по норме пространства ℓ^p. □

Замечание 4.1. Приведенное выше доказательство полноты пространства ℓ^p (так же как и стандартное доказательство полноты пространства $\ell^\infty(S)$) иллюстрирует общую схему, по которой доказывается полнота многих классических пространств, состоящих из $\mathbb{K}$-значных функций. Сначала берется фундаментальная последовательность, доказывается, что последовательность ее значений в каждой точке фундаментальна, а значит, и сходится (так как $\mathbb{K}$ полно). В итоге получается «кандидат на предел» — функция, к которой наша последовательность сходится поточечно. А затем надо еще раз воспользоваться фундаментальностью последовательности и доказать, что этот «кандидат на предел» на самом деле лежит в нашем пространстве и наша последовательность сходится к нему по норме. Обычно два последних утверждения доказываются «одним махом», как и в предыдущей теореме. Та же схема работает в случае, когда пространство состоит не из $\mathbb{K}$-значных функций, а из отображений со значениями в банаховом пространстве.

Теорема 4.7. *Пространство $L^p(X, \mu)$ полно для любого пространства с мерой (X, μ) и любого $p \in [1, +\infty]$.*

Доказательство этой теоремы содержится в листке 4 в качестве задачи (с подробным указанием). Отметим, что она обобщает теорему 4.6.

Обсудим теперь, какие из стандартных конструкций сохраняют полноту. Следующее предложение докажите сами в качестве упражнения (действуйте по той же схеме, что и в теореме 4.6).

Предложение 4.8. *Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — семейство банаховых пространств. Тогда $(\bigoplus X_i)_p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) и $(\bigoplus X_i)_0$ — банаховы пространства.*

Предложение 4.9. *Пусть X — банахово пространство и $X_0 \subset X$ — замкнутое векторное пространство. Тогда и X/X_0 — банахово пространство.*

Для доказательства предложения 4.9 удобно воспользоваться следующей леммой.

Лемма 4.10. *Следующие свойства нормированного пространства X эквивалентны:*

- (i) *X полно;*
- (ii) *если $x_1, x_2, \ldots \in X$ и $\sum_n \|x_n\| < \infty$, то ряд $\sum_n x_n$ сходится.*

Сходимость ряда в этой лемме понимается в том же смысле, что и сходимость числовых рядов: по определению, ряд в нормированном пространстве сходится, если сходится последовательность его частичных сумм. Докажите эту лемму сами в качестве упражнения; при доказательстве импликации (ii) $\Longrightarrow$ (i) выделите из произвольной фундаментальной последовательности (y_n) подпоследовательность (y_{n_k}), для которой $\|y_{n_k} - y_{n_{k-1}}\| \leqslant 1/2^k$, докажите ее сходимость и выведите отсюда сходимость последовательности (y_n).

Доказательство предложения 4.9. Пусть элементы $u_1, u_2, u_3, \ldots \in X/X_0$ таковы, что $\sum_n \|u_n\|^\wedge < \infty$. С учетом леммы 4.10 достаточно показать, что ряд $\sum_n u_n$ сходится в X/X_0. Обозначим через Q факторотображение X на X/X_0. По определению факторнормы, для каждого n существует такой $x_n \in Q^{-1}(u_n)$, что $\|x_n\| \leqslant \|u_n\|^\wedge + 1/2^n$. Тогда $\sum_n \|x_n\| < \infty$, поэтому в силу леммы 4.10 ряд $\sum_n x_n$ сходится к некоторому $x \in X$. Применяя отображение Q, получаем, что ряд $\sum_n u_n$ сходится к $Q(x)$. Следовательно, X/X_0 полно. □

Теорема 4.11. *Пусть X и Y — нормированные пространства, причем Y полно. Тогда и пространство $\mathscr{B}(X, Y)$ полно.*

Доказательство. Пусть (T_n) — фундаментальная последовательность в $\mathscr{B}(X, Y)$. Тогда $(T_n(x))$ — фундаментальная последовательность в Y для любого $x \in X$, поэтому она сходится. Положим $T(x) = \lim_n T_n(x)$. Получаем (очевидно, линейный) оператор $T\colon X \to Y$. Покажем, что T ограничен и $T_n \to T$ по норме. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\|T_n - T_m\| \leqslant \varepsilon$ при $n, m > N$. Тогда $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant \varepsilon$ для любого $x \in \mathbb{B}_{1,X}$. Фиксируем $n > N$; тогда при $m \to \infty$ получим $\|T_n(x) - T(x)\| \leqslant \varepsilon$ для любого $x \in \mathbb{B}_{1,X}$. Отсюда следует, во-первых, что $T_n - T \in \mathscr{B}(X, Y)$, так что $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, а во-вторых — что $\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon$ при $n > N$. Значит, $T_n \to T$ по норме, и все доказано. □

Докажем теперь одно несложное, но полезное свойство банаховых пространств. Его иногда называют *теоремой о продолжении по непрерывности*, хотя правильнее было бы, пожалуй, называть ее «теоремой о продолжении по равномерной непрерывности».

Теорема 4.12. *Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — плотное векторное подпространство, Y — банахово пространство. Тогда для любого $T_0 \in \mathscr{B}(X_0, Y)$ существует единственный $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, продолжающий T_0. При этом $\|T\| = \|T_0\|$. Если T_0 топологически инъективен или изометричен, то таков же и T.*

Доказательство. Единственность T очевидна ввиду плотности X_0 в X. Существование доказывается «в лоб» первым приходящим в голову способом. А именно, возьмем произвольный $x \in X$ и подберем последовательность (x_n) в X_0, сходящуюся к x. Ясно, что она фундаментальна, поэтому такова же и последовательность $(T_0 x_n)$ в Y. Но Y полно, поэтому существует $\lim_n T_0 x_n = y$. Этот предел не зависит от выбора последовательности (x_n), сходящейся к x: если (x'_n) — другая такая последовательность, то $x'_n - x_n \to 0$ и $T_0 x'_n - T_0 x_n \to 0$, так что $\lim_n T_0 x'_n = \lim_n T_0 x_n = y$. Поэтому, полагая $Tx = y$, мы получаем корректно определенное отображение из X в Y, продолжающее T_0. Из линейности T_0 и непрерывности алгебраических операций в X и Y легко следует линейность T. Далее, если $\|T_0 x\| \leqslant C\|x\|$ или же $\|T_0 x\| \geqslant c\|x\|$ для всех $x \in X_0$ (где $c, C > 0$ — некоторые константы), то те же оценки справедливы и для T и для всех $x \in X$. Отсюда следуют оставшиеся утверждения. □

4.2. Пополнение

Напомним, что *пополнением* метрического пространства X называется пара $(\widetilde{X}, J)$, где $\widetilde{X}$ — полное метрическое пространство, а $J\colon X \to \widetilde{X}$ — изометрическое отображение с плотным образом.

Определение 4.2. *Пополнением* нормированного пространства X называется пара $(\widetilde{X}, J)$, где $\widetilde{X}$ — банахово пространство, а $J\colon X \to \widetilde{X}$ — изометрический линейный оператор с плотным образом.

Таким образом, отличие этого определения от обычного определения пополнения метрического пространства состоит в том, что на $\widetilde{X}$ должна иметься структура векторного пространства, метрика на $\widetilde{X}$ должна порождаться некоторой нормой, и вложение J должно быть линейным.

Теорема 4.13. *У каждого нормированного пространства есть пополнение.*

Доказательство. Пусть $(\widetilde{X}, J)$ — пополнение X как метрического пространства. Отождествим X с $J(X)$ посредством J (т.е. договоримся отождествлять точки $x \in X$ и $J(x) \in J(X)$). Таким образом, X становится плотным подмножеством в $\widetilde{X}$. Зафиксируем $x, y \in \widetilde{X}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, и подберем последовательности (x_n) и (y_n) в X так, чтобы $x_n \to x$ и $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Положим по определению

$$\begin{aligned} x + y &= \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n), \\ \lambda x &= \lim_{n\to\infty} \lambda x_n, \\ \|x\| &= \lim_{n\to\infty} \|x_n\|. \end{aligned}$$

Несложная проверка, аналогичная той, которая была проделана в доказательстве теоремы 4.12, показывает, что указанные пределы существуют и не зависят от выбора последовательностей (x_n) и (y_n), сходящихся к x и y. Выполнение аксиом векторного пространства и аксиом нормы в $\widetilde{X}$ также проверяется без труда. Очевидно, что при так определенных операциях в $\widetilde{X}$ вложение J становится линейным. □

Замечание 4.2. Через некоторое время мы сможем предъявить более простое доказательство существования пополнения для нормированных пространств, не требующее (по сравнению с доказательством, приведенным выше) никаких дополнительных проверок.

Следующее свойство пополнения — больше чем просто свойство; на самом деле оно полностью характеризует пополнение с точностью до изометрического изоморфизма (см. соответствующую задачу в листке 4). Полезно сравнить следующую теорему с теоремой 3.7.

Теорема 4.14. *Пусть X — нормированное пространство. Тогда для любого банахова пространства Y и любого оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ существует единственный оператор $\widetilde{T} \in \mathscr{B}(\widetilde{X}, Y)$, делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, dashed, "\widetilde{T}"] & Y \\ X \arrow[u, "J"] \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

При этом $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Доказательство. Достаточно отождествить X с подпространством $J(X) \subset \widetilde{X}$ и воспользоваться теоремой 4.12. $\square$

По-другому теорему 4.14 можно переформулировать так:

Теорема 4.15. *Для любого банахова пространства Y отображение*

$$\mathscr{B}(\widetilde{X}, Y) \to \mathscr{B}(X, Y), \quad S \mapsto S \circ J,$$

является изометрическим изоморфизмом.

В качестве следствия теоремы 4.14 получаем следующее утверждение о единственности пополнения.

Следствие 4.16. *Пусть $(\widetilde{X}, J)$ и $(\widehat{X}, J')$ — пополнения нормированного пространства X. Тогда существует единственный изометрический изоморфизм $I \colon \widetilde{X} \to \widehat{X}$, делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[rr, dashed, "I"] & & \widehat{X} \\
& X \arrow[ul, "J"] \arrow[ur, "J'"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Доказательство. При $X = 0$ утверждение очевидно, поэтому мы будем считать, что $X \neq 0$. Из теоремы 4.14 следует, что существует единственный оператор $I \in \mathscr{B}(\widetilde{X}, \widehat{X})$, делающий диаграмму (4.3) коммутативной; при этом $\|I\| = \|J'\| = 1$. Из той же теоремы (примененной на этот раз к пополнению $(\widehat{X}, J')$) следует, что существует единственный оператор $I' \in \mathscr{B}(\widehat{X}, \widetilde{X})$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} & & \widehat{X} \arrow[ll, dashed, "I'"'] \\
& X \arrow[ul, "J"] \arrow[ur, "J'"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

При этом $\|I'\| = \|J\| = 1$. Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[rr, dashed] & & \widetilde{X} \\
& X \arrow[ul, "J"] \arrow[ur, "J"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.5}$$

Из коммутативности диаграмм (4.3) и (4.4) следует, что диаграмма (4.5) также будет коммутативной, если в качестве горизонтальной стрелки взять оператор $I' \circ I$. Но та же диаграмма (4.5), очевидно, будет коммутативной, если в качестве горизонтальной стрелки взять тождественный оператор $\mathbf{1}_{\widetilde{X}}$. Применяя утверждение о единственности из теоремы 4.14, получаем равенство $I' \circ I = \mathbf{1}_{\widetilde{X}}$. Меняя ролями пополнения $(\widetilde{X}, J)$ и $(\widehat{X}, J')$ и повторяя те же рассуждения, получаем равенство $I \circ I' = \mathbf{1}_{\widehat{X}}$. Следовательно, I — топологический изоморфизм и $I' = I^{-1}$. Наконец, из уже доказанных равенств $\|I\| = \|I^{-1}\| = 1$ следует, что I — изометрический изоморфизм. $\square$

Следующее свойство пополнения называют его «естественностью», или «функториальностью».

Следствие 4.17. *Для каждой пары нормированных пространств X и Y и каждого оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ определен единственный оператор $\widetilde{T} \in \mathscr{B}(\widetilde{X},\widetilde{Y})$, делающий следующую диаграмму коммутативной:*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{T}"] & \widetilde{Y} \\
X \arrow[u, "J_X"] \arrow[r, "T"] & Y \arrow[u, "J_Y"']
\end{tikzcd}$$

При этом $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Кроме того, $\widetilde{\mathbf{1}}_X = \mathbf{1}_{\widetilde{X}}$ и $(S \circ T)^{\sim} = \widetilde{S} \circ \widetilde{T}$ для любого $S \in \mathscr{B}(Y,Z)$.

Доказательство. Существование оператора $\widetilde{T}$, его единственность и равенство $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$ следуют из теоремы 4.14, примененной к оператору $J_Y T$. Остальные утверждения легко выводятся из утверждения о единственности. □

Замечание 4.3 (*для знакомых с языком категорий*)**.** Обозначим через $\mathscr{B}an$ (соответственно, $\mathscr{B}an_1$) полную подкатегорию в категории $\mathscr{N}orm$ (соответственно, в категории $\mathscr{N}orm_1$; см. замечание 3.1), объектами которой являются банаховы пространства. Следствие 4.17 утверждает, что пополнение может рассматриваться как функтор из $\mathscr{N}orm$ в $\mathscr{B}an$ (или из $\mathscr{N}orm_1$ в $\mathscr{B}an_1$). При этом теорема 4.15 означает, что функтор пополнения сопряжен слева к вложению $\mathscr{B}an$ в $\mathscr{N}orm$ (соответственно, $\mathscr{B}an_1$ в $\mathscr{N}orm_1$). В этом свете следствие 4.16 становится частным случаем теоремы о единственности представляющего объекта — в данном случае для функтора $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{N}orm_1}(X,Y)$, определенного на категории $\mathscr{B}an_1$.