Логика и алгоритмы -2010. Задание 4

50. Докажите, что формула ($p \Rightarrow q$) не эквивалентна никакой формуле, построенной из пропозициональных букв и связок $\vee$, $\wedge$.
51. Докажите, что разность множеств нельзя выразить с помощью операций объединения и пересечения, т.е. что булев терм ($X \cap -Y$) не тождествен никакому терму, построенному только из переменных и $\cup, \cap$.
52. Докажите для произвольных множеств A,B,C:

а) $A \times B \sim B \times A$,

б) $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$.

53. Пусть A,B,C,D - непустые множества, такие что $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$. Докажите, что A=B=C=D.
54. Докажите, что
а) все замкнутые отрезки на прямой равномощны;
б) все окружности на плоскости равномощны;
в) все замкнутые шары в 3-мерном пространстве равномощны.
55. Постройте биекции:
а) между прямой **R** и открытым интервалом]0,1[;
б) между прямой **R** и открытым лучом]0,+∞[;
в) между (сплошным) замкнутым квадратом и замкнутым кругом;
г) между открытым кругом и плоскостью.
56. Даны множества A,B,C, такие что $A \sim B$, $A \cap B = \varnothing$, $|C|=2$. Докажите, что $A \times C \sim A \cup B$.
57. Докажите, что композиция отображений сохраняет инъективность и сюръективность.
58. Докажите, что всякое отображение множеств $f\colon A \to B$ можно представить в виде композиции $g \cdot h$, где g - инъекция, h - сюръекция.
59. Пусть $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$ - отображения, такие что $g \cdot f = 1_A$ (тождественное отображение). Докажите, что f - инъекция, а g - сюръекция.
60. Пусть $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$ - отображения, такие что $g \cdot f = 1_A$ и $f \cdot g = 1_B$. Докажите, что f - биекция, а $g=f^{-1}$.
62. Пусть $f\colon A \to B$ - инъекция. Постройте сюръекцию $g\colon B \to A$, такую что $g \cdot f = 1_A$.
63. Пусть A, B - конечные множества, причем $|A|<|B|$.

а) Докажите, что существует инъекция из A в B.

б) Докажите, что существует сюръекция из B на A.

63. Пусть A, B - конечные множества, причем $|A|<|B|$. Докажите, что не существует инъекции из B в A.
64. Пусть A - конечное множество, $g\colon B \to A$ - сюръекция. Постройте инъекцию $f\colon A \to B$, такую что $g \cdot f = 1_A$.
65. Пусть A, B - конечные множества, причем $|A|<|B|$. Докажите, что не существует сюръекции из A на B.
66. Пусть A - конечное множество, B - бесконечное множество.

а) Индукцией по $|A|$ докажите, что существует инъекция из A в B.

б) Докажите, что существует сюръекция из B на A.

67. Докажите, что график отображения равномощен источнику этого отображения.
68. Найдите pr_1R, pr_2R для следующих отношений R:

а) $R=\{(x,y) \mid x \in \mathbf{N} \wedge y \in \mathbf{N} \wedge x \text{ делит } y\}$

б) $R=\{(x,y)|\ x\in\mathbf{Z} \wedge y\in\mathbf{Z} \wedge x+y<0\}$

в) $R=\{(x,y)|\ x\in\mathbf{N} \wedge y\in\mathbf{N} \wedge 2x<3y<3x\}$

69. Пусть R, S $\subseteq$ A×B. Докажите равенства:

а) $pr_1R = pr_2(R^{-1})$,

б) $pr_2R = pr_1(R^{-1})$,

в) $(R^{-1})^{-1}=R$,

г) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1} \cup S^{-1}$,

д) $(R\cap S)^{-1}=R^{-1} \cap S^{-1}$.

70. Для каких множеств A существует такое отношение R $\subseteq$ A×A, что $R^{-1} = (A\times A)\setminus R$?

71. Используя теорему Кантора - Бернштейна и задачи 54-55, докажите равномощность следующих множеств:

а) всех интервалы различных видов на прямой,

б) открытого и замкнутого круга на плоскости,

в) окружности и прямой,

г) всех сплошных прямоугольников на плоскости.