Вариант 1

Задачи 1–3 являются обязательными и необходимыми для получения максимальной оценки в 10 баллов. Задача 4 — дополнительная и будет оцениваться отдельно; приступайте к ней, если останется время после решения первых трех задач.

В задачах 1–3 после решения не забудьте выписать ответ!

1. Рассмотрим векторное пространство $X = C_b(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Мажорирует ли норма $\|\cdot\|_1$ норму $\|\cdot\|_\infty$ на X? А наоборот?

2. Пусть $\lambda = (\lambda_n)$ — последовательность комплексных чисел. Зафиксируем произвольное $p > 1$ и сопоставим каждому $x \in \ell^p$ числовую последовательность $M_\lambda(x) = (\lambda_n x_n)$.
1) Пусть $q > p$. Найдите условие на λ, необходимое и достаточное для того, чтобы M_λ был линейным оператором из ℓ^p в ℓ^q.
2) Пусть $q > p$. Найдите условие на λ, необходимое и достаточное для того, чтобы M_λ был ограниченным линейным оператором из ℓ^p в ℓ^q, и вычислите $\|M_\lambda\|$.
3) Найдите условие на λ, необходимое и достаточное для того, чтобы M_λ был ограниченным линейным оператором из ℓ^p в ℓ^1, и вычислите $\|M_\lambda\|$.

3. Линейный функционал F на $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ задан формулой

$$F(f) = 2f(0) - 3f(1) + \int_0^1 f(t)\,dt.$$

1) Докажите, что F ограничен.
2) Вычислите $\|F\|$.
3) Достигает ли F нормы? Иначе говоря, существует ли такая $f \in C[0,1]$, что $\|f\|_\infty = 1$ и $|F(f)| = \|F\|$?

4. Пусть X, Y — нормированные пространства и $T \in \mathscr{B}(X,Y)$.
1) Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
  (а) T имеет плотный образ;
  (б) если $S_1 T = S_2 T$ для некоторых $S_1, S_2 \in \mathscr{B}(Y,Z)$, то $S_1 = S_2$.
2) Предположим, что T имеет плотный образ. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
  (а) T открыт;
  (б) если $T = S_1 S_2$, где $S_1 \in \mathscr{B}(Z,Y)$ инъективен, а $S_2 \in \mathscr{B}(X,Z)$ произволен, то S_1 — топологический изоморфизм.

Вариант 2

Задачи 1–3 являются обязательными и необходимыми для получения максимальной оценки в 10 баллов. Задача 4 — дополнительная и будет оцениваться отдельно; приступайте к ней, если останется время после решения первых трех задач.

В задачах 1–3 после решения не забудьте выписать ответ!

1. Рассмотрим векторное пространство $X = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Мажорирует ли норма $\|\cdot\|_1$ норму $\|\cdot\|_2$ на X? А наоборот?

2. Пусть $f \in C[0,1]$ — непрерывная комплекснозначная функция. Зафиксируем произвольное $p > 1$ и сопоставим каждой $g \in L^p[0,1]$ функцию $M_f(g) = fg$.
1) Пусть $q > p$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для того, чтобы M_f был линейным оператором из $L^p[0,1]$ в $L^q[0,1]$.
2) Пусть $q > p$. Найдите условие на f, необходимое и достаточное для того, чтобы M_f был ограниченным линейным оператором из $L^p[0,1]$ в $L^q[0,1]$, и вычислите $\|M_f\|$.
3) Найдите условие на f, необходимое и достаточное для того, чтобы M_f был ограниченным линейным оператором из $L^p[0,1]$ в $L^1[0,1]$, и вычислите $\|M_f\|$.

3. Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Линейный функционал F на $(C[-1,1], \|\cdot\|_p)$ задан формулой

$$F(f) = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt - \int_{0}^{1} f(t)\,dt.$$

1) Докажите, что F ограничен.
2) Вычислите $\|F\|$.
3) Достигает ли F нормы? Иначе говоря, существует ли такая $f \in C[-1,1]$, что $\|f\|_p = 1$ и $|F(f)| = \|F\|$?

4. Пусть X, Y — нормированные пространства и $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ — сжатие (т.е. оператор, норма которого не превосходит 1).
1) Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
  (а) T имеет плотный образ;
  (б) если $S_1T = S_2T$ для некоторых $S_1, S_2 \in \mathscr{B}(Y,Z)$, то $S_1 = S_2$.
2) Предположим, что T имеет плотный образ. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
  (а) T коизометричен;
  (б) если $T = S_1S_2$, где $S_1 \in \mathscr{B}(Z,Y)$ инъективен, а $S_2 \in \mathscr{B}(X,Z)$ произволен, то S_1 — изометрический изоморфизм.