§4. Исчисление формальных степенных рядов (напоминания)

4.1. Алгебраические операции над рядами. Пусть K — произвольное коммутативное кольцо с единицей. Операция, сопоставляющая рядам $f_1, f_2, \dots, f_n \in K[[x]]$ новый ряд $g \in K[[x]]$, называется алгебраической, если каждый коэффициент ряда g вычисляется конечным числом арифметических действий над конечным числом коэффициентов рядов $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Например, сложение и умножение рядов — это алгебраические операции, а подстановка вместо x ненулевого численного значения $\alpha \in K$ алгебраической операцией обычно не является[1]. Напротив, подстановка в ряд $f(x)$ вместо x другого ряда $g(x) = b_1x + b_2x^2 + \cdots$ без свободного члена — это алгебраическая операция, дающая ряд

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \sum_{k\geqslant 0} a_k(b_1x + b_2x^2 + \cdots)^k = \\ &= a_0 + a_1(b_1x + b_2x^2 + \cdots) + a_2(b_1x + b_2x^2 + \cdots)^2 + a_3(b_1x + b_2x^2 + \cdots)^3 + \cdots = \\ &= a_0 + (a_1b_1)\cdot x + (a_1b_2 + a_2b_1^2)\cdot x^2 + (a_1b_3 + 2\,a_2b_1b_2 + a_3b_1^3)\cdot x^3 + \cdots, \end{aligned}$$

в котором на коэффициент при x^m оказывают влияние только первые m слагаемых, причём в каждом из них вклад в коэффициент при x^m вносит лишь конечное число начальных членов. Ещё одним примером алгебраической операции является деление рядов.

Предложение 4.1

Пусть K — любое кольцо. Ряд $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \in K[[x]]$ тогда и только тогда обратим в $k[[x]]$, когда его свободный член a_0 обратим в K. Если обратный ряд существует, то операция обращения $f \mapsto f^{-1}$ является алгебраической.

Доказательство. Если существует ряд $f^{-1}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots \in \mathbb{F}[[x]]$, такой что $f(x)\cdot f^{-1}(x) = 1$, то $a_0b_0 = 1$, откуда a_0 обратим. Наоборот, допустим, что $a_0 \in K$ обратим. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой части равенства $f(x)\cdot f^{-1}(x) = 1$, мы получаем на коэффициенты b_i бесконечную систему уравнений

$$\begin{aligned} a_0b_0 &= 1 \\ a_0b_1 + a_1b_0 &= 0 \\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_0b_\nu + a_1b_{\nu-1} + \cdots + a_\nu b_0 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\quad , \end{aligned} \tag{4-1}$$

из которой они все однозначно определяются по рекуррентным формулам $b_0 = a_0^{-1}$ и, $b_k = -a_0^{-1}(a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_kb_0)$ для всех $k \geqslant 1$. □

4.2. Дифференциальное исчисление. Подставим в степенной ряд $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ вместо x сумму $x+t$, где t — ещё одна переменная. Получится ряд от двух переменных $f(x+t) = a_0 + a_1(x+t) + a_2(x+t)^2 + \cdots \in K[[x,t]]$. Раскроем в нём все скобки и сгруппируем слагаемые по степеням переменной t, обозначив через $f_m(x) \in K[[x]]$ ряд, который получится в качестве коэффициента при t^m:

$$f(x+t) = f_0(x) + f_1(x)\cdot t + f_2(x)\cdot t^2 + f_3(x)\cdot t^3 + \cdots = \sum_{i\geqslant 0} f_m(x)\cdot t^m\,. \tag{4-2}$$

[1] очевидным исключением из этого правила служит, к примеру, «вычисление значения» ряда $f(x)$ при $x = 0$, дающее в качестве результата свободный член этого ряда; похожий эффект иногда происходит при вычислении значений некоторых специальных рядов в некоторых специальных точках; однако, при общих $\alpha \neq 0$ для ряда f с бесконечным множеством ненулевых коэффициентов вычисление $f(\alpha)$ скорее всего потребует бесконечно много сложений ненулевых чисел

Упражнение 4.1. Убедитесь, что $f_0(x) = f(x)$ совпадает с исходным рядом f.

Ряд $f_1(x)$, служащий коэффициентом при t^1, называется производной от исходного ряда f и обозначается $f'(x)$ или $\frac{d}{dx}f$. Он однозначно определяется тем, что

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)\cdot t + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\,,$$

и может быть вычислен как свободный член ряда

$$\begin{aligned}\frac{f(x+t)-f(x)}{t} &= a_1\cdot\frac{(x+t)-t}{t} + a_2\cdot\frac{(x+t)^2-t^2}{t} + a_3\cdot\frac{(x+t)^3-t^3}{t} + \ \cdots = \\ &= \sum_{k\geqslant 1} a_k\cdot\Big((x+t)^{k-1} + (x+t)^{k-2}x + (x+t)^{k-3}x^2 + \ \cdots + \ x^{k-1}\Big)\,.\end{aligned}$$

Полагая справа $t=0$, получаем для производного ряда стандартное разложение

$$f'(x) = \sum_{k\geqslant 1} k\, a_k x^{k-1} = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \ \cdots \tag{4-3}$$

Предложение 4.2

Для любого $\alpha\in K$ и любых $f,g\in K[[x]]$ справедливы равенства

$$(\alpha f)' = \alpha\cdot f'\ ,\quad (f+g)' = f'+g'\ ,\quad (fg)' = f'\cdot g + f\cdot g'\ . \tag{4-4}$$

Кроме того, если ряд g не имеет свободного члена, то

$$(f(g(x))' = g'(x)\cdot f'(g(x))\ , \tag{4-5}$$

а если ряд f обратим, то

$$(1/f)' = -\frac{f'}{f^2}\ . \tag{4-6}$$

Доказательство. Первые два равенства в (4-4) вытекают прямо из формулы (4-3). Для доказательства третьего перемножим ряды

$$\begin{aligned} f(x+t) &= f(x) + t\cdot f'(x) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\\ g(x+t) &= g(x) + t\cdot g'(x) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\ .\end{aligned}$$

С точностью до членов, делящихся на t^2, получим

$$f(x+t)g(x+t) = f(x)g(x) + t\cdot(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\,,$$

откуда $(fg)' = f'\cdot g + f\cdot g'$. Формула (4-5) доказывается похожим образом. Подставим в $f(x)$ вместо x ряд $g(x+t)$: $f(g(x+t)) = f\big(g(x)+t\cdot g'(x) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\big)$ и обозначая ряд, который прибавляется к $g(x)$ в аргументе f, через $\tau(x,t) = t\cdot g'(x) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)$. Получаем

$$\begin{aligned} f(g(x+t)) &= f\big(g(x)+\tau(x,t)\big) = \\ &= f(g(x)) + \tau(x,t)\cdot f'(g(x)) + (\text{члены, делящиеся на } \tau(x,t)^2) = \\ &= f(g(x)) + t\cdot g'(x)\cdot f'(g(x)) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\ ,\end{aligned}$$

откуда $(f(g(x))' = g'(x)\cdot f'(g(x))$. Для доказательства последней формулы продифференцируем обе части равенства $f\cdot f^{-1} = 1$. Получим $f'\cdot f^{-1} + f\cdot\big(f^{-1}\big)' = 0$, откуда $\big(f^{-1}\big)' = -f'/f^2$. □

Упражнение 4.2. Покажите, что в разложении (4-2) $f_m(x) = \frac{1}{m!}\,\frac{d^m}{dx^m}\,f(x)$.

4.2.1. Пример: дифференцирование степеней. Применяя m раз правило Лейбница, находим:

$$\begin{aligned}(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\cdot\ \cdots\ \cdot f_m(x))' = & f_1'(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\cdot\ \cdots\ \cdot f_m(x)+\\ & +f_1(x)\cdot f_2'(x)\cdot f_3(x)\cdot\ \cdots\ \cdot f_m(x)+\\ & +f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3'(x)\cdot\ \cdots\ \cdot f_m(x)+\\ & +\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ +\\ & +f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\cdot\ \cdots\ \cdot f_m'(x)\,.\end{aligned}$$

Если все m сомножителей одинаковы, мы получаем формулу для дифференцирования степени

$$(f^m(x))' = m\cdot f^{m-1}(x)\cdot f'(x)\,. \tag{4-7}$$

С её помощью нетрудно развернуть в ряд m-тую степень геометрической прогрессии $1/(1-x)^m$.

Упражнение 4.3. Используя формулы (4-6) и (4-7) покажите, что m-тая производная от $1/(1-x)$ равна $m!/(1-x)^{m+1}$.

Дифференцируя $m-1$ раз обе части разложения $1/(1-x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+\ \cdots$, получим по предыдущей задаче

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{(k+m-1)(k+m-2)\ \cdots\ (k+1)}{(m-1)!}\cdot x^k\,. \tag{4-8}$$

4.3. Интегральное исчисление. Формула для вычисления производной (4-3) показывает, что над полем характеристики нуль для любого ряда $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ существует единственный ряд без свободного члена, производная от которого равна $f(x)$. Этот ряд называется первообразным рядом или интегралом от f и обозначается

$$\int f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ \cdots\ = \sum_{k\geqslant 1}\frac{a_{k-1}}{k}x^k\,. \tag{4-9}$$

Начиная с этого места и до конца этого параграфа мы по умолчанию предполагаем, что область коэффициентов $K = \mathbb{F}$ является полем характеристики нуль.

4.3.1. Логарифмирование. Первообразный ряд от знакопеременной геометрической прогрессии называется логарифмом и обозначается

$$\begin{aligned}\ln(1+x) \overset{\text{def}}{=} \int\frac{dx}{1+x} = \int\left(1-x+x^2-x^3+\ \cdots\right)dx = \\ = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ \cdots\ = \sum_{k\geqslant 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\,.\end{aligned} \tag{4-10}$$

Вместо $1+x$ в логарифм можно подставить любой ряд $u(x)$ с единичным свободным членом — ряд $\ln(u(x))$ получается подстановкой в правую часть (4-10) вместо x ряда $u(x)-1$ без свободного члена, что является, как мы видели в (n° 4.1), алгебраической операцией.

Упражнение 4.4 (логарифмическая производная). Выведите из формулы (4-5) для производной сложной функции, что для любого ряда u с единичным свободным членом $(\ln u)' = u'/u$ (правая часть этого равенства называется *логарифмической производной* от ряда u).

Обозначим через $N \subset \mathbb{F}[[x]]$ аддитивную абелеву группу всех рядов без свободного члена, а через $U \subset \mathbb{F}[[x]]$ — мультипликативную абелеву группу всех рядов с единичным свободным членом. Операция логарифмирования, переводящая ряд $u(x) \in U$ в ряд $\ln(u(x)) \in N$, является алгебраической и задаёт отображение

$$\log : U \xrightarrow{u\mapsto \ln u} N\,. \tag{4-11}$$

Мы собираемся показать, что это отображение является изоморфизмом абелевых групп. Для этого потребуется отображение, обратное к логарифмированию.

4.3.2. Экспоненцирование. Ряд

$$e^x \overset{\text{def}}{=} \sum_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ \cdots \tag{4-12}$$

называется экспонентой. Это единственный ряд со свободным членом единица, удовлетворяющий дифференциальному уравнению $f'(x) = f(x)$.

Подставляя в (4-12) вместо x любой ряд $\tau(x)$ без свободного члена, мы получаем ряд $e^{\tau(x)}$ со свободным членом 1, который называется экспонентой ряда $\tau(x)$. Таким образом, возникает экспоненциальное отображение

$$\exp : N \xrightarrow{\tau\mapsto e^{\tau}} U\ . \tag{4-13}$$

Предложение 4.3
Экспоненциальное и логарифмическое отображения (4-13) и (4-11) являются взаимно обратными изоморфизмами абелевых групп. В частности, для любых рядов $u, u_1, u_2 \in U$ и $\tau, \tau_1, \tau_2 \in N$ выполняются тождества: $\ln e^{\tau} = \tau$, $e^{\ln u} = u$, $\ln(u_1u_2) = \ln(u_1) + \ln(u_2)$, $e^{\tau_1+\tau_2} = e^{\tau_1}e^{\tau_2}$.

Доказательство. Ряды $\ln(e^x)$ и x оба имеют нулевой свободный член и одинаковые производные:

$$\ln(e^x)' = \frac{(e^x)'}{e^x} = \frac{e^x}{e^x} = 1 = x'\ .$$

Поэтому $\ln(e^x) = x$. Подставляя в это равенство вместо x любой ряд $\tau(x)$ без свободного члена, получаем

$$\ln e^{\tau} = \tau \qquad \forall\, \tau \in N\ . \tag{4-14}$$

Заметим теперь, что для проверки равенства двух рядов $f, g \in U$ достаточно установить равенство их логарифмических производных, поскольку из

$$0 = \ln'(f) - \ln'(g) = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} = \frac{g}{f} \cdot \left(\frac{f}{g}\right)'$$

вытекает, что $(f/g)' = 0$ и $f/g = \text{const} = 1$. Из этого замечания и формулы (4-14) вытекает, что для любого ряда $u \in U$ выполняется равенство

$$e^{\ln u} = u \tag{4-15}$$

(логарифмы от обоих частей совпадают, а значит совпадают и логарифмические производные). Таким образом, экспоненцирование и логарифмирование взаимно обратны и, стало быть, оба биективны. Для любых рядов $u_1, u_2 \in U$ ряды $\ln(u_1u_2)$ и $\ln u_1 + \ln u_2$ оба имеют нулевой свободный член и одинаковые производные:

$$(\ln(u_1u_2))' = \frac{(u_1u_2)'}{u_1u_2} = \frac{u_1'u_2 + u_1u_2'}{u_1u_2} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} = (\ln u_1)' + (\ln u_2)' = (\ln u_1 + \ln u_2)'\ .$$

Поэтому $\ln(u_1u_2) = \ln u_1 + \ln u_2$. Таким образом, логарифмирование $U \xrightarrow{\ln} N$ является биективным гомоморфизмом. Но тогда и обратное отображение гомоморфизм. □

Упражнение 4.5. Покажите, что $\forall\, u \in U \ \ \ln(1/u) = -u$.

4.4. Бином Ньютона. Для любого числа $\alpha \in \mathbb{F}$ определим биномиальный ряд с показателем α формулой

$$(1 + x)^{\alpha} \overset{\text{def}}{=} e^{\alpha \ln(1+x)}.$$

Подставляя вместо $1 + x$ произвольные ряды $u \in U$, мы для любого числа $\alpha \in \mathbb{F}$ получаем корректно определённую алгебраическую операцию возведения в α-тую степень

$$U \xrightarrow{u\mapsto u^{\alpha}=e^{\alpha \ln u}} U\ ,$$

которая обладает всеми свойствами, интуитивно ожидаемыми от степенной функции. А именно, для любых рядов $u, v \in U$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ выполняются равенства

$$u^\alpha \cdot u^\beta = e^{\alpha \ln u} \cdot e^{\beta \ln u} = e^{\alpha \ln u + \beta \ln u} = e^{(\alpha+\beta)\ln u} = u^{\alpha+\beta} \tag{4-16}$$

$$(u^\alpha)^\beta = e^{\beta \ln(u^\alpha)} = e^{\beta \ln\left(e^{\alpha \ln u}\right)} = e^{\alpha\beta \ln u} = u^{\alpha\beta} \tag{4-17}$$

$$(uv)^\alpha = e^{\alpha \ln(uv)} = e^{\alpha(\ln u + \ln v)} = e^{\alpha \ln u + \alpha \ln v} = e^{\alpha \ln u} \cdot e^{\alpha \ln v} = u^\alpha v^\alpha \tag{4-18}$$

В частности, для любого ряда u с единичным свободным членом $u^{1/n} = \sqrt[n]{u}$ в том смысле, что $\left(u^{1/n}\right)^n = u$.

Для явного отыскания коэффициентов a_i биномиального ряда

$$(1+x)^\alpha = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

вычислим его логарифмическую производную:

$$\frac{((1+x)^\alpha)'}{(1+x)^\alpha} = (\ln(1+x)^\alpha)' = \left(\ln e^{\alpha \ln(1+x)}\right)' = \big(\alpha \ln(1+x)\big)' = \frac{\alpha}{1+x}\,.$$

Приводя левую и правую часть к общему знаменателю, получаем соотношение

$$\big(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ \cdots\big) \cdot (1+x) = \alpha \cdot (1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ \cdots)\,.$$

Сравнивая коэффициенты при x^{k-1} в правой и левой части, приходим к рекуррентному соотношению $k a_k + (k-1) a_{k-1} = \alpha a_{k-1}$, из которого

$$a_k = \frac{\alpha - (k-1)}{k} \cdot a_{k-1} = \frac{(\alpha-(k-1))(\alpha-(k-2))}{k(k-1)} \cdot a_{k-2} = \ \cdots$$

$$\cdots \ = \frac{(\alpha-(k-1))(\alpha-(k-2))\cdots(\alpha-1)\alpha}{k!}\,.$$

Стоящая в правой части дробь имеет и в числителе и в знаменателе по k множителей, представляющих собою последовательно уменьшающиеся на единицу числа: в знаменателе — от k до 1, в числителе — от α до $(\alpha - k + 1)$. Эта дробь называется биномиальным коэффициентом и обозначается

$$\binom{\alpha}{k} \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \tag{4-19}$$

Нами доказана

Предложение 4.4 (формула Ньютона)
Для любого числа $\alpha \in \mathbb{F}$ имеется разложение

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k \geqslant 0} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \ \cdots\,.$$

4.4.1. Пример: бином с натуральным показателем. При натуральном значении показателя $\alpha = n \in \mathbb{N}$ имеется лишь конечное число ненулевых биномиальных коэффициентов, поскольку при $k > n$ в числителе (4-19) образуется нулевой сомножитель. Поэтому разложение бинома с натуральным показателем конечно:

$$(1+x)^n = 1 + n\,x + \frac{n(n-1)}{2}\,x^2 + \ \cdots \ + x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k\,,$$

а сами биномиальные коэффициенты в этом случае симметричны относительно замены k на $n-k$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n(n-1)\cdots(k+1)}{(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

4.4.2. Пример: бином с отрицательным показателем. При $\alpha \notin \mathbb{N}$ биномиальный ряд имеет бесконечно много ненулевых коэффициентов. Например, для целой отрицательной степени $\alpha = -m$, $m \in \mathbb{N}$, мы снова получаем разложение (4-8)

$$\frac{1}{(1+x)^m} = 1 - m\,x + \frac{m(m+1)}{2}\,x^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{6}\,x^3 + \cdots = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{m+k}{k}\cdot x^k\,,$$

другим способом полученное нами в n° 4.2.1.

4.4.3. Пример: разложение радикалов. При $\alpha = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ формула Ньютона разворачивает в степенной ряд радикал

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{1+x} &= 1 + \frac{1}{n}\,x + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2}\,x^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{6}\,x^3 + \cdots = \\ &= 1 + \frac{x}{n} - \frac{n-1}{2}\cdot\frac{x^2}{n^2} + \frac{(n-1)(2n-1)}{2\cdot 3}\cdot\frac{x^3}{n^3} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{x^4}{n^4} + \cdots\,.\end{aligned}$$

В частности, при $n = 2$ в качестве коэффициента при x^k мы получаем дробь вида

$$(-1)^{k-1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2k)} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\frac{(2k)!}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2k))^2} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)\cdot 4^k}\cdot\binom{2k}{k}.$$

Таким образом,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cdot\binom{2k}{k}\cdot\frac{x^k}{4^k}\,. \tag{4-20}$$

4.4.4. Пример: числа Каталана. Воспользуемся разложением (4-20) для получения явной формулы для чисел Каталана, часто возникающих в различных комбинаторных задачах. Пусть при вычислении суммы $(n+1)$ слагаемых

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad \text{(всего } n \text{ плюсов)} \tag{4-21}$$

в каждый момент времени разрешается делать не более одного сложения. Такое вычисление разбивается на n последовательных шагов, на каждом из которых выполняется некоторое конкретное сложение, в результате чего все знаки «+» оказываются занумерованными в том порядке, в котором они выполняются. Количество всех возникающих таким способом нумераций n плюсов называется n-ым числом Каталана c_n. Удобно также по определению считать, что $c_0 = 1$. Подчеркнём, что рассматриваемые нами нумерации плюсов далеко не произвольны.

Упражнение 4.6. Убедитесь, что $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$, $c_4 = 14$ (и, тем самым, $c_n \neq n!$).

Количество способов вычислить сумму (4-21) так, чтобы последним выполняется i-тый слева плюс, равно $c_{i-1}c_{n-i}$ — мы можем независимо посчитать сумму i чисел, стоящих слева от i-того плюса, и $n-i+1$ чисел, стоящих от него справа, для чего у нас имеется, соответственно, c_{i-1} и c_{n-i} способов. Таким образом, числа Каталана c_n удовлетворяют соотношению

$$c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \cdots + c_{n-2}c_1 + c_{n-1}c_0\,, \tag{4-22}$$

i-тое слагаемое которого учитывает все вычисления, в которых последним выполняется i-тый слева плюс записи (4-21). Чтобы выразить c_n через n явно, образуем степенной ряд

$$c(x) = \sum_{k\geqslant 0} c_kx^k = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots\,.$$

Равенство (4-22) означает, что этот ряд удовлетворяет соотношению

$$\frac{c(x)-1}{x} = c(x)^2\,.$$

Иначе говоря, $t = c(x)$ является решением квадратного уравнения

$$x \cdot t^2 - t - 1 = 0$$

на неизвестную t. По стандартной школьной формуле получаем[1] $c(x) = \left(1 - \sqrt{1-4x}\right)/(2x)$. По (4-20)

$$\sqrt{1-4x} = -\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2k-1} \cdot \binom{2k}{k} \cdot x^k ,$$

откуда

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \binom{2k+2}{k+1} = \frac{1}{k+1} \cdot \binom{2k}{k} .$$

Отметим, что с первого взгляда даже не очевидно, что это число — целое.

Упражнение 4.7. В выпуклом n угольнике проводят максимально возможное число диагоналей так, чтобы они не пересекались нигде, кроме вершин. Сколькими способами это можно сделать?

4.5. Действие $\mathbb{Q}[[d/dt]]$ на $\mathbb{Q}[t]$. Отображение дифференцирования

$$D \,:\, \mathbb{Q}[t] \xrightarrow{p(t)\mapsto p'(t)} \mathbb{Q}[t] ,$$

является линейным оператором на пространстве многочленов $\mathbb{Q}[t]$. В алгебре линейных операторов на $\mathbb{Q}[t]$ корректно определена операция подстановки оператора D в любой формальный степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k \in \mathbb{Q}[[x]] .$$

Результатом такой подстановки является линейный оператор $f(D) \,:\, \mathbb{Q}[t] \longrightarrow \mathbb{Q}[t]$, переводящий многочлен $p \in \mathbb{Q}[t]$ в

$$f(D)p = (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots)p = a_0 \cdot p + a_1 \cdot Dp + a_2 \cdot D^2 p + \ \cdots = \sum_{k\geqslant 0} a_k \cdot D^k p . \tag{4-23}$$

(мы, как обычно, полагаем $D^0 = \mathrm{Id}$). Поскольку каждое применение D к многочлену с рациональными коэффициентами уменьшает его степень на единицу, все производные $D^k p$ с $k > \deg p$ в правой части (4-23) обращаются в нуль, так что сумма в правой части (4-23) состоит из конечного числа слагаемых (зависящего от многочлена p) и, тем самым, является многочленом, который можно полностью вычислить конечным числом арифметических действий над коэффициентами исходного многочлена p и первыми $\deg(p)$ коэффициентами ряда f.

Упражнение 4.8. Вычислите результат применения операторов $\sqrt{1+D}$ и e^D к многочлену t^2.

Линейный оператор $F : \mathbb{Q}[t] \longrightarrow \mathbb{Q}[t]$ называется разностным оператором, если $F = f(D)$ для некоторого $f(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$. Разностные операторы образуют коммутативную подалгебру в алгебре всех линейных операторов, и вычисление композиции разностных операторов сводится к перемножению отвечающих им рядов.

В следствие линейности, для вычисления значения разностного оператора $f(D) = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots$ на произвольном многочлене достаточно уметь вычислять его значение на всех базисных мономах t^m. Многочлены

$$f_m(t) = f(D) t^m$$

называются многочленами Аппеля ряда $f \in \mathbb{Q}[[x]]$ (и разностного оператора $f(D)$). Ясно, что $\deg f_m \leqslant m$, и коэффициенты многочлена f_m зависят только от первых $m+1$ коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_m$ ряда f.

[1] обратите внимание, что ряд $1 - \sqrt{1-4x}$ не имеет свободного члена и потому делится в $\mathbb{Q}[[x]]$ на $2x$, причём частное имеет свободный член $c_0 = 1$, как нам и требуется; второе решение $\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ не является «целым» степенным рядом: знаменатель не обратим, а числитель, имея ненулевой свободный член, на него не делится

4.5.1. Пример: операторы сдвига аргумента. Многочлены Аппеля для экспоненты

$$e^D = 1 + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \cdots ,$$

согласно формуле (n° 4.4.1) для разложения бинома с натуральным показателем, имеют вид

$$e^D t^m = \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}D^k t^m = \sum_{k\geqslant 0}\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}t^{m-k} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}t^{m-k} = (t+1)^m .$$

Таким образом, оператор e^D действует на произвольный многочлен сдвигом аргумента на единицу:

$$e^D : p(t) \mapsto p(t+1) .$$

Обратный оператор $1/e^D = e^{-D}$ сдвигает аргумент в противоположную сторону:

$$e^{-D}p(t) = p(t-1) .$$

Упражнение 4.9. Покажите, что $e^{\alpha D} : p(t) \mapsto p(t+\alpha)$ для произвольного $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Упражнение 4.10. Покажите, что линейный оператор $F : \mathbb{Q}[t] \mapsto \mathbb{Q}[t]$ тогда и только тогда является разностным, когда он перестановочен со всеми операторами сдвига $e^{\alpha D}$ (для всех $\alpha \in \mathbb{Q}$).

4.5.2. Пример: вычисление степенных сумм. В работе «Ars Conjectandi» Яков Бернулли не без гордости отмечал[1], что сумел просуммировать десятые степени первой тысячи натуральных чисел менее, чем за половину четверти часа. Речь шла о вычислении суммы $1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+1000^{10}$, проделанном Бернулли при помощи открытой им формулы, выражающей

$$S_m(n) = 0^m + 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m = \sum_{k=0}^{n}k^m \tag{4-24}$$

в виде многочлена $(m+1)$-ой степени от n. Для отыскания такого многочлена рассмотрим разностный оператор[2]

$$\nabla = 1 - e^{-D} \,:\, \mathbb{Q}[t] \xrightarrow{p(t)\mapsto p(t)-p(t-1)} \mathbb{Q}[t] .$$

Если многочлен $S_m(t) \in \mathbb{Q}[t]$ удовлетворяет при всех целых неотрицательных $t = n$ соотношению (4-24), то $\nabla S_m(t) = t^m$. Если бы ряд $1-e^{-x}$ был обратим в $\mathbb{Q}[[x]]$, многочлен $S_m(t)$ был бы ни чем иным, как m-тым многочленом Аппеля для обратного ряда. Но, к сожалению, ряд $1-e^{-x}$ не имеет свободного члена, и стало быть не обратим. Однако, его можно записать в виде произведения:

$$1 - e^{-x} = \frac{1-e^{-x}}{x}\cdot x ,$$

в котором первый сомножитель $(1-e^{-x})/x$ обратим. Обратный к нему ряд

$$\mathrm{td}(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{x}{1-e^{-x}} \in \mathbb{Q}[[x]]$$

называется рядом Тодда. Поскольку $\mathrm{td}(x)\cdot(1-e^{-x}) = x$, применяя оператор $\mathrm{td}(D)$ к обеим частям равенства $\nabla S_m(t) = t^m$, мы получаем выражение для производной от искомого многочлена $S_m(t)$:

$$S'_m(t) = DS_m(t) = \mathrm{td}(D)\nabla S_m(t) = \mathrm{td}(D)t^m .$$

[1] сочинение «Ars Conjectandi» было опубликовано в 1713 уже после смерти Якова Бернулли (1654–1705)

[2] символ ∇ читается «набла»

В виду равенства $S_m(0) = 0$ многочлен $S_m(t)$ не имеет свободного члена и получается из $S'_m(t)$ интегрированием по формуле из n° 4.3. Для упрощения вычислений удобно записать ряд Тодда в «экпоненциальной форме», вынеся из коэффициентов обратные факториалы:

$$\operatorname{td}(x) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{a_k}{k!}\, x^k \tag{4-25}$$

Тогда ответ на задачу Бернулли даётся формулой

$$\begin{aligned} S_m(t) &= \int \Big(\sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{k!} D^k t^m \Big)\, dt = \int \Big(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a_k t^{m-k} \Big)\, dt = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{a_k t^{m-k+1}}{m-k+1} = \\ &= \frac{1}{m+1} \left(\binom{m+1}{1} a_m t + \binom{m+1}{2} a_{m-1} t^2 + \cdots + \binom{m+1}{m} a_1 t^m + \binom{m+1}{m+1} a_0 t^{m+1} \right), \end{aligned}$$

которую часто представляют в символическом виде

$$(m+1) \cdot S_m(t) = (a{\downarrow} + t)^{m+1} - a_{m+1}\,,$$

где стрелка у $a{\downarrow}$ предписывает заменять a^k на a_k при раскрытии бинома $(a+t)^{m+1}$.

Числа a_k находятся из определяющего ряд Тодда соотношения $\operatorname{td}(x) \cdot (1 - e^{-x})/x = 1$, которое в развёрнутом виде выглядит как

$$\Big(1 + a_1 x + \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{a_3}{6} x^2 + \frac{a_4}{24}\, x^4 + \cdots \Big) \cdot \Big(1 - \frac{1}{2}\, x + \frac{1}{6}\, x^2 - \frac{1}{24}\, x^3 + \frac{1}{120}\, x^4 - \cdots \Big) = 1\,.$$

Упражнение 4.11. Найдите первую дюжину чисел a_k ([1]).

Упражнение 4.12. Напишите явные формулы для $S_4(n)$ и $S_5(n)$ ([2]).

Упражнение 4.13*. Попробуйте повторить достижение Бернулли — вычислите[3] $S_{10}(1000)$.

4.6. Числа Бернулли. Ряд Тодда вошёл в математический обиход лишь во второй половине XX века после работ Хирцебруха и Гротендика по топологии и алгебраических многообразий, где он применялся для формулировки и доказательства теоремы Риана – Роха. Во времена Бернулли и Эйлера предпочитали пользоваться рядом $\operatorname{td}(-x) = \frac{x}{e^x - 1}$, который также записывали в экспоненциальной форме

$$\operatorname{td}(-x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{B_k}{k!}\, x^k\,. \tag{4-26}$$

Коэффициенты B_k этого разложения называются *числами Бернулли*. Они отличаются от коэффициентов a_k ряда Тодда только в самом первом члене: $B_1 = -\frac{1}{2} = -a_1$. В самом деле,

$$\operatorname{td}(x) - \operatorname{td}(-x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} + \frac{x}{1 - e^x} = x \cdot \frac{2 - e^x - e^{-x}}{(1 - e^{-x}) \cdot (1 - e^x)} = x\,. \tag{4-27}$$

Поэтому $B_k = a_k$ при $k \neq 1$, причём при всех нечётных $k \geqslant 3$ эти числа обращаются в нуль, т. к. нечётная составляющая ряда Тодда (равная половине разности (4-27)) есть $x/2$. Со времён своего открытия Яковом Бернули, числа B_k вызывают неослабевающий интерес. Имеется даже специальный интернет-ресурс `http://www.bernoulli.org/`, где, среди прочего, выложена компьтерная программа, вычисляющая числа B_k в виде несократимых рациональных дробей. Однако, не смотря на огромное количество красивых теорем о числах Бернулли, никакой внятной формулы, явно выражающей B_n через n нет, и любой содержательный новый взгляд в этом направлении был бы интересен.

---

[1] ответы: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{30}$, $a_5 = 0$, $a_6 = \frac{1}{42}$, $a_7 = 0$, $a_8 = -\frac{1}{30}$, $a_9 = 0$, $a_{10} = \frac{5}{66}$, $a_{11} = 0$, $a_{12} = -\frac{691}{2730}$

[2] ответы: $S_4(n) = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$, $S_5(n) = n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)/12$

[3] напомню, у Бернулли на это ушло около 7 минут, причём калькуляторов в те годы не было…

Упражнение 4.14. Получите для чисел Бернулли рекурсивную формулу

$$(n+1)B_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} \cdot B_k \,.$$

Упражнение 4.15*. Докажите, что числа B_k с чётными $k \geqslant 2$ имеют чередующиеся знаки.

Оглавление