

§6. Исчисление массивов, таблиц и диаграмм

6.1. Массивы. Зафиксируем два конечных упорядоченных множества из n и m элементов:

$$I = \{1, 2, \dots, n\}, \quad J = \{1, 2, \dots, m\} \quad (6-1)$$

и будем рассматривать прямоугольные таблицы из n столбцов и m строк, занумерованных элементами I и J соответственно. Таковую таблицу a мы будем называть массивом и размещать в декартовой системе координат, считая что элементы из I растут слева направо по горизонтальной оси, элементы из J растут снизу вверх по вертикальной оси. Содержимое $a(i, j)$ клетки с координатами (i, j) у нас всегда будет целым неотрицательным числом, которое стоит воспринимать как «количество» или «массу». Весь массив удобно представлять себе как набор шариков одинаковой массы, которые наделены двумя группами признаков и в соответствии с этим разложены по ячейкам массива. Мы никогда не будем вычислять с числами $a(i, j)$, но будем перекладывать шарики из ячейки в ячейку, меняя тем самым их принадлежность к тому или иному признаку каждой из двух групп.

С массивом a связан столбцовый вес (или I -вес)

$$w^I = \left(\sum_j a(1, j), \sum_j a(2, j), \dots, \sum_j a(n, j) \right) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n, \quad (6-2)$$

представляющий собой n -мерный целочисленный вектор, i -тая координата которого равна общему количеству шариков в i -том столбце. Аналогично определяется строчный вес (или J -вес)

$$w^J = \left(\sum_i a(i, 1), \sum_i a(i, 2), \dots, \sum_i a(i, m) \right) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m. \quad (6-3)$$

Массивы можно транспонировать относительно диагонали $i = j$:

$$a \longmapsto a^t \quad \text{с} \quad a^t(i, j) = a(j, i), \quad (6-4)$$

а также центрально симметрично отражать относительно середины таблицы:

$$a \longmapsto a^* \quad \text{с} \quad a^*(i, j) = a(n + 1 - i, m + 1 - j). \quad (6-5)$$

6.2. Элементарные операции. На множестве всех массивов действуют четыре набора элементарных операций D_j, U_j, L_i, R_i (где $1 \leq i \leq n - 1, 1 \leq j \leq m - 1$). При применении любой из них к данному массиву a этот массив либо никак никак не меняется, либо ровно один шарик в нём перемещается ровно на одну клетку вниз (Down), вверх (Up), влево (Left) или вправо (Right).

6.2.1. Вертикальные операции D_j и U_j перемещают шар по вертикали в пределах соседних j -той и $(j + 1)$ -ой строки. Чтобы узнать, какой именно шар следует передвинуть (или убедиться в том, что такого шарика нет), следует вначале установить между j -той и $(j + 1)$ -ой строкой устойчивое паросочетание¹. Делается это следующим образом.

Будем последовательно перебирать шарики в $(j + 1)$ -ой строке двигаясь слева направо и либо назначать им партнёров в j -той строке, либо объявлять свободными. Пусть очередной шарик w лежит в клетке $(i, j + 1)$. Его партнёром называем самый правый шар из тех, что лежат в строке j строго левее i -того столбца и ещё не назначены никому партнёрами. Если таких шаров нет, шар w объявляется свободным. После того, как все шары $(j + 1)$ -ой строки будут разделены на свободные и имеющие партнёров, все шары j -той строки, не являющиеся ни чьими партнёрами, также объявляются свободными. Вот пример такого паросочетания (в скобках указано число свободных шаров):

$$\begin{array}{cccccc}
 2(2) & 2(0) & 4(1) & 3(0) & 3(0) & \\
 & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \\
 & & & & & \\
 & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \\
 3(0) & 2(0) & 6(1) & 1(0) & 3(3) &
 \end{array} \quad (6-6)$$

¹по-английски: *stable matching*

По определению, операция D_j опускает на одну клетку вниз самый правый свободный шар $(j+1)$ -ой строки или ничего не делает, если свободных шаров в $(j+1)$ -ой строчке нет. Операция U_j поднимает на одну клетку вверх самый левый свободный шар j -той строки или ничего не делает, если в j -ой строке нет свободных шаров. В случае, когда операция изменяет массив, мы будем говорить, что она действует на рассматриваемый массив эффективно).

Так, в примере (6-6) операция D_j (соотв. U_j) опускает вниз (соотв. поднимает вверх) верхний (соотв. нижний) свободный шар в третьей колонке. Тем самым, обе они эффективны и обратны друг другу.

Из конструкции устойчивого паросочетания ясно, что все свободные шары j -той строки лежат нестрого правее свободных шаров $(j+1)$ -ой строки. Поэтому, если операция D_j действует на массив a эффективно, то опущенный ею шар станет самым левым свободным шаром нижней строки при устойчивом паросочетании между преобразованными строками. Стало быть, операция U_j , применённая к массиву $D_j a$ поднимет этот опущенный шар назад, т. е. $U_j D_j a = a$ всякий раз, когда D_j действует на a эффективно. Аналогично, если U_j действует эффективно, то $D_j U_j a = a$.

Говоря неформально, набор вертикальных операций D, U образует структуру, близкую к групповой — исходный массив a однозначно восстанавливается из результата применения к нему слова $D = D_{j_1} \cdots D_{j_k}$ по формуле $a = U_{j_k} \cdots U_{j_1} (D_{j_1} \cdots D_{j_k}(a))$ при условии, что каждая буква D_j действует эффективно. Мы будем называть такие D -слова a -эффективными (или просто эффективными, если понятно, о каком a речь).

6.2.2. Горизонтальные операции L_{i+1} и R_i определяются симметричным образом: они действуют в i -м и $(i+1)$ -м столбцах и превращаются в операции D и U при транспонировании массива, т. е. $L_i(a) = (D_i(a^t))^t$, $R_i(a) = (U_i(a^t))^t$.

УПРАЖНЕНИЕ 6.1. Переговорите это определение явно: скажите, как установить устойчивое паросочетание между i -тым и $(i+1)$ -м столбцом, и какой шар будут перемещать R_i и L_i .

Отметим, что операции D, L сохраняют столбцовый вес, а операции R, U — строчный.

ЛЕММА 6.1 (ЛЕММА О КОММУТИРОВАНИИ)

Каждый горизонтальный оператор U_i, R_i перестановочен с каждым вертикальным D_j, L_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы покажем, что D_j и U_j перестановочны с L_i — остальные случаи разбираются аналогично. Пусть действие операции L_i заключается в перемещении шара u на одну клетку влево. Достаточно убедиться, что эта процедура не изменяет устойчивого паросочетания между $(j+1)$ -ой и j -той строкой в том смысле, что после применения L_i связанными в пары будут в точности те же самые шары, что и до применения. Это очевидно, когда u лежит вне $(j+1)$ -ой и j -той строк. Остаются два случая, представленные на рис. 6◊1.

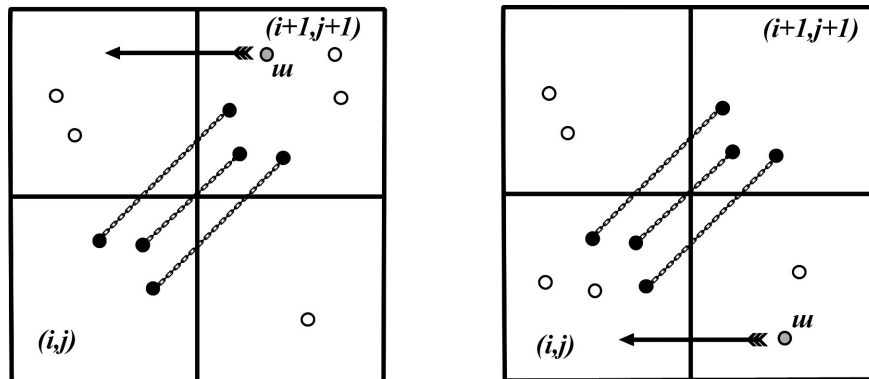


Рис. 6◊1. Горизонтальная операция L_i не меняет устойчивого вертикального паросочетания.

Пусть u лежит в $(j+1)$ -ой строчке, т. е. в клетке $(i+1, j+1)$ (левая картинка на рис. 6◊1). Тогда все шары из клетки (i, j) имеют партнёров в клетке $(i+1, j+1)$, иначе шар u получил бы

себе партнёра в клетке (i, j) в паросочетании между i -тым и $(i + 1)$ -м столбцом. Поэтому, если в строчном паросочетании у шара u был партнёр, то он был строго левее клетки (i, j) , а значит и останется партнёром после перемещения u на клетку влево. А если партнёра у u не было, то он и не появится. Таким образом, при перемещении u строчное паросочетание не изменяется.

Пусть u лежит в j -той строчке (правая картинка на рис. 6◊1). Поскольку он является самым верхним свободным шаром в столбцовом паросочетании, все шары из клетки $(i + 1, j + 1)$ при имеют партнёров в клетке (i, j) . Но тогда и в строчном паросочетании все шары из $(i + 1, j + 1)$ -той клетки получают партнёров в клетке (i, j) . Поэтому перемещение шара u на клетку влево и в этом случае не изменит ни его статуса, ни партнёра (если таковой был). \square

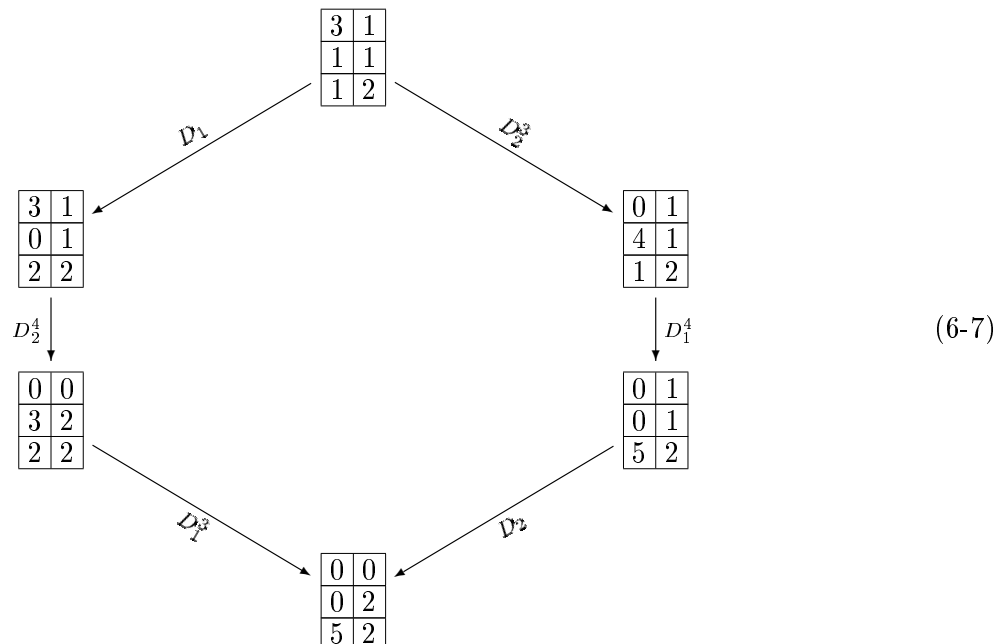
Следствие 6.1

Слово H , составленное из горизонтальных операций, тогда и только тогда эффективно действует на a , когда оно эффективно действует на любой массив, получающийся из a вертикальными операциями. Аналогично, слово V , составленное из вертикальных операций, тогда и только тогда эффективно действует на a , когда оно эффективно действует на любой массив, получающийся из a горизонтальными операциями.

Доказательство. Мы докажем первое утверждение, оставив второе читателю. Достаточно проверить, что для любых i, j операция L_i эффективно действует на a тогда и только тогда, когда она эффективно действует на $D_j a$, и только тогда, когда она эффективно действует на $U_j a$.

Если $L_i a = a$, то $L_i D_j a = D_j L_i a = D_j a$, и $L_i U_j a = U_j L_i a = U_j a$. Наоборот, если $L_i a \neq a$, то i -тая компонента столбцового веса $w^I(L_i a)$ будет строго больше i -той компоненты $w^I(a)$, а так как D_j и U_j не меняют столбцовый вес, то $L_i D_j a = D_j L_i a \neq D_j a$, и $L_i U_j a = U_j L_i a \neq U_j a$. \square

6.3. Уплотнение массивов. Будем называть массив D-, L-, R- или U- плотным (т.е. плотным вниз, влево, вправо или вверх), если все уплотняющие операции соответствующего типа действуют на него тождественно. Очевидно, что применение к данному массиву достаточно большого числа операций одного из типов в конце концов приведёт к плотному в соответствующую сторону массиву. Такое уплотнение, как правило, можно производить многими разными способами. Вот, например, два пути уплотнения вниз случайного массива 3×2 :



Обратите внимание, что результат уплотнения оказался не зависящим от способа уплотнения. Мы докажем это фундаментальное свойство уплотнений в предл. 6.1, а сейчас сделаем несколько предварительных замечаний.

Прежде всего, из сл. 6.1 вытекает, что при действии вертикальных операций на плотный влево или вправо массив этот массив будет оставаться плотным в ту же сторону. То же самое справедливо для действия горизонтальных операций на массив, который плотен вниз или вверх. Поэтому любой массив можно сделать плотным одновременно в каком-нибудь вертикальном и в каком-нибудь горизонтальном направлении. Мы будем называть такие массивы DL-плотными, DR-плотными, и т. п. В дальнейшем мы будем заниматься в основном DL-уплотнениями, и будем называть биплотными массивы, которые плотны одновременно вниз и влево.

6.3.1. Биплотные массивы и диаграммы Юнга. Легко видеть, что шары в биплотном массиве могут располагаться только вдоль главной диагонали $i = j$, причём их количества в диагональных ячейках должны нестрого убывать с ростом i . Тем самым, столбцовый вес биплотного массива равен строчному и представляет собой диаграмму Юнга $\lambda = w^I(b) = w^J(b)$. Итак, биплотные массивы b взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга¹. Применяя к произвольному массиву a достаточное число операций L и D , мы превратим его в биплотный массив. Соответствующая диаграмма Юнга называется формой массива a и обозначается $\Phi(a)$.

Предложение 6.1

Результат D-, L-, R- или U-уплотнения не зависит от выбора последовательности уплотняющих операций.

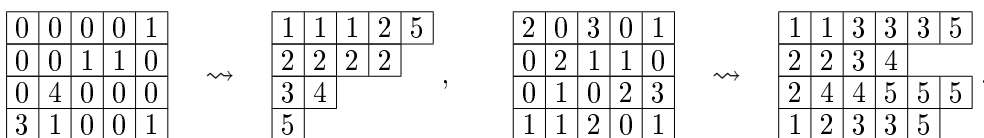
Доказательство. Мы рассмотрим только случай D-уплотнения. Если массив a плотен влево, то результат его D-уплотнения — это биплотный массив, отвечающий диаграмме Юнга $w^I(a)$. Поскольку $w^I(a)$ не меняется при вертикальных уплотняющих операциях, результат D-уплотнения L-плотного массива не зависит от способа уплотнения. Пусть теперь a произволен. Зафиксируем какое-нибудь слово $L = L_{i_1}L_{i_2} \dots L_{i_k}$, эффективно уплотняющее a влево до массива $a' = La$. Тогда для любого слова $D = D_{j_1}D_{j_2} \dots D_{j_k}$, такого что Da плотен вниз, действие L на Da тоже будет эффективным, а массив $LDa = DLa$ будет биплотен (поскольку применение L сохраняет свойство массива Da быть плотным вниз, а применение D сохраняет свойство массива La быть плотным влево). Таким образом, мы можем записать Da как $L^{-1}DLa$. Так как массив DLa , по уже доказанному, не зависит от выбора уплотняющего слова D (ибо DLa есть D-уплотнение L-плотного массива La), массив $Da = L^{-1}DLa$ тоже не зависит от выбора D . \square

6.3.2. Плотные массивы и таблицы Юнга. Из любого массива высоты m и ширины n можно изготовить m слов (по одному слову из каждой строки массива), записанных алфавитом $\{1, 2, \dots, n\}$. Делается это при помощи процедуры, которая называется строчной развёрткой массива и состоит в следующем.

Интерпретируем все шарики массива как буквы, равные номеру того столбца, где стоит шарик. После этого пройдем по каждой строке слева направо, выписывая подряд все встречающиеся нам буквы. В результате j -тая строка массива развернется в слово

$$\underbrace{11 \dots 1}_{a(1,j)} \underbrace{22 \dots 2}_{a(2,j)} \dots \dots \dots \underbrace{nn \dots n}_{a(n,j)} .$$

Получающиеся m слов запишем друг под другом в столбик, сверху вниз², выровняв их по левому краю. Например:



Очевидно, что буквы в каждом слове строчной развёртки нестрого возрастают.

¹здесь и далее в этом параграфе мы отождествляем между собою две конечных последовательности неотрицательных целых чисел, получающиеся одна из другой приписыванием справа любого числа нулей; например, мы считаем равными диаграммы $(2, 1, 1)$ и $(2, 1, 1, 0, 0, 0)$

²таким образом из нижней строки массива получается верхнее слово и т. д.

Условие плотности массива вниз (как в левом примере выше) означает, что под каждой буквой « i » в j -том слове (т. е. под шариком, пришедшим из клетки $a(i, j)$) стоит строго большая, чем « i », буква $(j + 1)$ -го слова (партнёр этого шарика при устойчивом паросочетании между j -той и $(j + 1)$ -ой строками массива). Следовательно, длины слов строчной развёртки плотного вниз массива нестрого убывают сверху вниз, т. е. образуют диаграмму Юнга, а буквы $\{1, 2, \dots, n\}$ заполняют эту диаграмму нестрого возрастают по строкам и строго возрастают по столбцам. Такие заполнения данной диаграммы λ называются таблицами Юнга формы λ на алфавите $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Мы доказали следующий комбинаторный факт:

ЛЕММА 6.2

Строчная развёртка устанавливает биекцию между плотными вниз массивами размера $m \times n$ и таблицами Юнга на алфавите $\{1, 2, \dots, n\}$, состоящими из $\leq m$ строк. \square

УПРАЖНЕНИЕ 6.2. Покажите, что массив $a = (a(i, j))$ плотен вниз тогда и только тогда, когда для всех $i \in I$ и $j \in J$ выполняются неравенства:

$$a(1, j + 1) + a(2, j + 1) + \dots + a(i, j + 1) \leq a(1, j) + a(2, j) + \dots + a(i - 1, j), \quad (6-8)$$

и напишите аналогичные неравенства, эквивалентные L-, R- и U-плотности массива a .

6.3.3. Плотные массивы и тексты Яманучи. L-плотность массива a можно воспринимать как D-плотность транспонированного массива a^t и, соответственно, сформулировать в терминах столбцовой развёртки: плотные влево массивы биективно соответствуют таблицам Юнга из $\leq n$ строк в алфавите J .

Однако часто оказывается полезным характеристика L-плотности в терминах строчной развёртки. Для этого будем читать слова строчной развёртки L-плотного массива a справа налево одно за другим, сверху вниз. Условие плотности влево означает тогда, что в любом начальном куске получающейся последовательности букв единиц будет не меньше, чем двоек, двоек — не меньше, чем троек, и т. д. для всех пар последовательных букв « i » и « $(i + 1)$ » из I . В комбинаторике текст с таким свойством называется текстом Яманучи. Например, левая из двух строчных развёрток

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & \\ \hline 2 & 3 & 3 & \\ \hline 1 & 2 & & \\ \hline \end{array},$$

является текстом Яманучи, а правая — нет. Итак, нами установлена

ЛЕММА 6.3

Строчная развёртка устанавливает биекцию между плотными влево массивами размера $m \times n$ и текстами Яманучи из $\leq m$ слов на алфавите $\{1, 2, \dots, n\}$. \square

6.4. Теорема о биекции. Напомним вначале одну конструкцию из теории множеств. Если заданы два отображения множеств: $X \xrightarrow{\varphi} Z$ и $Y \xrightarrow{\psi} Z$, то дизъюнктное объединение прямых произведений слоёв этих отображений над точками $z \in Z$ обозначается

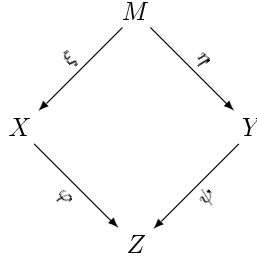
$$X \times_Z Y \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{z \in Z} \varphi^{-1}(z) \times \psi^{-1}(z)$$

и называется послойным (или расслоенным) произведением множеств X и Y над Z .

УПРАЖНЕНИЕ 6.3. Покажите, что коммутативная диаграмма отображений множеств

$$\begin{array}{ccc} & X \times_Z Y & \\ \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\ X & & Y \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varrho \\ & Z & \end{array} \quad (6-9)$$

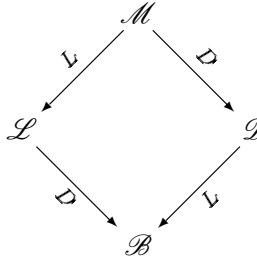
(в которой $\pi_X : (x, y) \mapsto x$ и $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$) универсальна в том смысле, что для любого другого коммутативного квадрата



имеется единственное отображение $M \xrightarrow{\alpha} X \times_Z Y$, такое что $\xi = \pi_X \circ \alpha$, $\eta = \pi_Y \circ \alpha$, и убедитесь, что это свойство определяет множество M и квадрат¹ (6-9) однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми стрелками квадрата (6-9).

ТЕОРЕМА 6.1

Множество всех массивов \mathcal{M} представляет собою расслоенное произведение $\mathcal{M} = \mathcal{L} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$ множества плотных влево массивов \mathcal{L} на множество плотных вниз массивов \mathcal{D} над множеством биплотных массивов \mathcal{B} , причём диаграмма



(в которой стрелки L и D переводят массив в его уплотнения влево и вниз соответственно) коммутативна и представляет собою универсальный декартов квадрат (6-9).

Доказательство. По предл. 6.1 стрелки L и D корректно определены и перестановочны друг с другом. Мы должны показать, что отображение $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$, сопоставляющее массиву a пару (La, Da) со свойством $DLa = LDa \in \mathcal{B}$ взаимно однозначно.

Инъективность. Пусть массивы a и a' таковы, что $La = La'$ и $Da = Da'$. Выберем для $Da = Da'$ эффективное уплотняющее влево слово Λ . Тогда оно эффективно действует и на a , и на a' . Получаем: $a = \Lambda^{-1}La = \Lambda^{-1}La' = a'$.

Сюръективность. Для любой пары массивов (a_ℓ, a_d) , в которой a_ℓ плотен влево, a_d плотен вниз, и $Da_\ell = La_d$, рассмотрим слово Λ , эффективно уплотняющее a_d влево до La_d . Обратное слово Λ^{-1} эффективно действует на La_d , а значит, и на a_ℓ . Массив $a = \Lambda^{-1}a_\ell$ таков, что $La = a_\ell$, и $Da = D\Lambda^{-1}a_\ell = \Lambda^{-1}Da_\ell = \Lambda^{-1}La_d = a_d$. \square

6.4.1. Пример: графики отображений и стандартные таблицы. График отображения множеств $I \xrightarrow{a} J$ — это массив, в каждом столбце которого имеется ровно один шарик. По теор. 6.1 такие массивы взаимно однозначно параметризуются парами (a_ℓ, a_d) в которой a_ℓ плотен влево, a_d плотен вниз, причём оба этих массива имеют одинаковую форму $Da_\ell = La_d$, и $w^I(a_d) = (1, 1, \dots, 1)$. Каждая такая пара, согласно п° 6.3.2, являет собою следующий набор данных: диаграмма Юнга $\lambda = DLa = LDa$ веса $|\lambda| = n$ (форма массива a), таблица Юнга формы λ на алфавите J (строчная развёртка транспонированного L-уплотнения a_ℓ^t) и таблица Юнга формы λ на алфавите I , в которой каждая буква используется ровно один раз (строчная развёртка D-уплотнения a_d).

¹он называется *декартовым квадратом*

Таблицы формы λ заполненные без повторов числами от 1 до $|\lambda|$ называются стандартными таблицами формы λ . Число стандартных таблиц формы λ принято обозначать через d_λ , а число всех таблиц формы λ на m -буквенном алфавите — через $d_\lambda(m)$.

Поскольку всего имеется m^n отображений $I \longrightarrow J$, мы получаем соотношение

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda} \cdot d_{\lambda}(m) = m^n, \quad (6-10)$$

где суммирование идёт по всем n -клеточным диаграммам Юнга и числа $d_{\lambda}(m)$ отличны от нуля только для диаграмм из $\leq m$ строк.

Если положить $\#J = \#I = n$, и ограничиться только биективными отображениями $I \xrightarrow{\sim} J$, то эта же конструкция даст биекцию между $n!$ элементами симметрической группы S_n и парами стандартных таблиц одинаковой формы веса n , т. е. равенство

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda}^2 = n!, \quad (6-11)$$

где сумма идёт по всем n -клеточным диаграммам. Эта последняя биекция взаимно однозначно переводит инволютивные перестановки¹ $\sigma \in S_n$ в самосопряжённые массивы $a = a^t$, которым в теореме о биекции отвечают пары одинаковых стандартных таблиц. Поэтому

$$\sum_{\lambda} d_{\lambda} = \#\{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = 1\}. \quad (6-12)$$

6.5. DU-множества и DU-орбиты. Будем называть DU-множеством всякое множество массивов, которое переводится в себя вертикальными операциями D и U . Гомоморфизмы DU-множеств — это отображения, перестановочные с действием операций D и U .

DU-множество, на котором операции D и U действуют транзитивно, будем называть DU-орбитой. DU-орбиты взаимно однозначно соответствуют плотным вниз массивам. Орбита O такого массива a_d состоит из всевозможных массивов, которые можно получить из a_d эффективными U -словами. Мы будем называть a_d нижним концом орбиты O .

Орбиты O_{λ} биplotных массивов λ называются стандартными. Из теоремы о биекции вытекает, что уплотнение влево задаёт изоморфизм любой DU-орбиты O со стандартной орбитой O_{λ} , нижний конец которой является биуплотнением нижнего конца орбиты O .

Например, при $m = 3$ стандартная орбита $O_{(2,1)}$, отвечающая диаграмме–таблице–массиву

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad - \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad - \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

состоит из восьми массивов, представленных на рис. 6◊2.

ЛЕММА 6.4

Произвольный гомоморфизм DU-орбит $O' \xrightarrow{\varphi} O''$ либо биективен, либо орбита O'' состоит из одной точки².

Доказательство. Поскольку нижний конец является единственным элементом орбиты, на который все D -операции действуют тождественно, нижний конец $a'_d \in O'$ переходит в нижний конец $a''_d \in O''$. Отсюда получается сюръективность: $a'' = U a''_d = U \varphi(a'_d) = \varphi(U a'_d)$.

Допустим теперь, что нашлись два разных массива $a_1, a_2 \in O'$, такие что $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$. Тогда для любой операции D_j также будет выполняться равенство $\varphi(D_j a_1) = \varphi(D_j a_2)$. Будем применять к обеим частям неравенства $a_1 \neq a_2$ такие D -операции, которые оставляют его

¹т. е. такие, что $\sigma^2 = 1$

²т. е. массива, который плотен как вверх, так и вниз

неравенством. Это не может продолжаться бесконечно, и в итоге мы придём к паре массивов $a_1 \neq a_2$, таких что $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$, и $D_j a_1 = D_j a_2$ для всех D_j .

Условия $a_1 \neq a_2$ и $D_j a_1 = D_j a_2$ означают, что D_j эффективно действует ровно на один из массивов a_1, a_2 . Поэтому для каждого D_j ровно один из массивов a_1, a_2 остаётся на месте (мы обозначим этот массив через a_f^j) и ровно один (мы обозначим его через a_e^j) — меняется, причём так, что $\varphi(D_j a_e^j) = \varphi(D_j a_f^j) = \varphi(a_f^j) = \varphi(a_e^j)$ — это один и тот же элемент орбиты O'' , который мы обозначим через a'' . Все операторы U_j, D_j оставляют a'' на месте:

$$\begin{aligned} D_j a'' &= D_j \varphi(a_f^j) = \varphi(D_j a_f^j) = \varphi(a_f^j) = a'' \\ U_j a'' &= U_j \varphi(D_j a_e^j) = \varphi(U_j D_j a_e^j) = \varphi(a_e^j) = a'' . \end{aligned}$$

Тем самым, a'' является одновременно и верхним и нижним концом орбиты O'' , т. е. $O'' = \{a''\}$, что и утверждалось. \square

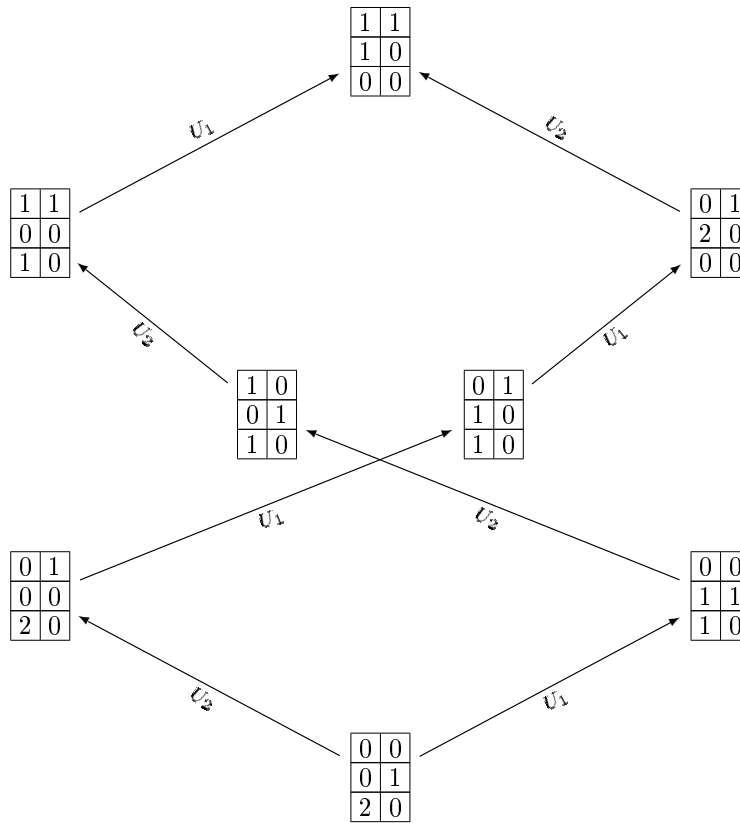


Рис. 6◊2. Стандартная DU-орбита $O_{(2,1)}$.

ЛЕММА 6.5

Объединения, пересечения и разности DU-множеств также являются DU-множествами. В частности, всякое DU-множество распадается в дизъюнктное объединение DU-орбит.

Доказательство. Не вполне очевидно лишь утверждение про разности. Пусть A' и A'' DU-инвариантны и $a' \in A' \setminus A''$. Если $D_j a' \in A''$, то D_j действует эффективно, и тогда $a' = U_j D_j a'$ тоже лежит в A'' . \square

6.6. Действие симметрической группы $S_m = \text{Aut}(J)$. На любом DU-множестве массивов M имеется действие элементарных транспозиций $\sigma_j = (j, j+1)$, порождающих симметрическую группу S_m , переставляющую строки массива. Оно определяется следующим образом.

Пусть в j -той и $(j+1)$ -ой строках после установления между ними устойчивого паросочетания образовалось, соответственно, s_j и s_{j+1} свободных шаров. Положим

$$\sigma_j = D_j^{s_{j+1}-s_j} = U_j^{s_j-s_{j+1}} . \quad (6-13)$$

Подробнее эту процедуру можно описать так. Свернём массив в вертикальный цилиндр, приклеив правую границу n -того столбца к левой границе первого, и продолжим устойчивое паросочетание по кругу, т. е. назначим в пару самому правому нижнему свободному шару самый левый свободный верхний и т. д. В результате останется ровно $|s_{j+1} - s_j|$ свободных шаров и все они будут располагаться или только в верхней или только в нижней строке — там где их вначале было больше. Операция σ_j просто передвигает их по вертикали в другую строку (или ничего не делает, если $s_j = s_{j+1}$). В частности, действие σ_j на строчный вес w^J состоит в перестановке j -той и $(j+1)$ -ой координаты.

Из предыдущего описания видно, что $\sigma_j^2 = \text{Id}$, а также, что σ_j коммутирует с циклическими перестановками столбцов. Очевидно также, что σ_j перестановочна с горизонтальными операциями R , L и со всеми σ_k с $|k - j| \geq 2$.

Таким образом, для того чтобы действие σ_j непротиворечиво продолжалось на всю симметрическую группу S_m остаётся проверить выполнение уравнения треугольника

$$\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}.$$

Это достаточно сделать для трёхстрочного массива. Пользуясь уплотнениями влево L и циклическими перестановками столбцов C мы редуцируем любой трёхстрочный массив в одностолбцовому:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline * & * & * \\ \hline \end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & 0 \\ \hline f & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|c|} \hline b & c & a \\ \hline e & 0 & d \\ \hline 0 & 0 & f \\ \hline \end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|c|} \hline g & h & 0 \\ \hline k & 0 & 0 \\ \hline f & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{C} \begin{array}{|c|c|} \hline h & g \\ \hline 0 & k \\ \hline 0 & f \\ \hline \end{array} \xrightarrow{L} \begin{array}{|c|c|} \hline \ell & 0 \\ \hline k & 0 \\ \hline f & 0 \\ \hline \end{array}$$

для которого действие σ_j просто переставляет строки, и потому удовлетворяет соотношению треугольника.

6.7. Полиномы Шура. Будем интерпретировать все шарики j -той строки как переменные x_j и сопоставим каждому массиву a моном, получающийся перемножением всех шариков массива:

$$x^a = x_1^{w_1^J(a)} x_2^{w_2^J(a)} \dots x_m^{w_m^J(a)}$$

(показатель у x_j равен j -той координате строчного веса $w^J(A)$). Суммируя мономы x^a по всем массивам из произвольного DU-множества M , мы получаем многочлен

$$s_M(x) = \sum_{a \in M} x^a \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_m],$$

который называется многочленом Шура DU-множества M . Поскольку симметрическая группа S_m переставляет координаты весового вектора, она действует на мономы x^a перестановками переменных. Таким образом, все многочлены Шура являются симметрическими.

Поскольку каждое DU-множество M является объединением непересекающихся орбит, а всякая орбита изоморфна стандартной орбите O_λ с нижним концом в биплотном массиве подходящей формы λ , произвольный полином Шура является линейной комбинацией стандартных многочленов Шура $s_\lambda(x)$, отвечающих L-плотным массивам формы λ :

$$s_M(x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{F}(M)} c_M^\lambda \cdot s_\lambda(x) \quad (6-14)$$

(здесь λ пробегает множество форм, встречающихся среди массивов из M , а коэффициент c_M^λ равен количеству всех D-плотных массивов J -веса λ в M — числу DU-орбит, изоморфных O_λ).

Согласно п° 6.3.2, элементы стандартной орбиты O_λ (т. е. L-плотные массивы формы λ) взаимно однозначно соответствуют таблицам Юнга формы λ в алфавите $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Таким образом, стандартный полином Шура имеет вид

$$s_\lambda(x) = \sum_{\eta} K_{\lambda, \eta} \cdot x^\eta = \sum_{\eta} K_{\lambda, \eta} \cdot x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \dots x_m^{\eta_m}, \quad (6-15)$$

где $\eta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ пробегает m -мерные целочисленные векторы с неотрицательными координатами, а коэффициент $K_{\lambda, \eta}$ равен числу таблиц формы λ , заполненных η_1 единицами, η_2 двойками, и т. д. (про такие таблицы говорят, что они имеют состав η).

Например, при $m = 3$ из представленной на рис. 6◊2 схемы получаем

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2 x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2.$$

Число $K_{\lambda, \eta}$ называется числом Костки. Например, $K_{\lambda, (1^{|\lambda|})} = d_\lambda$ равно числу стандартных таблиц формы λ . Отметим, что все $K_{\lambda, \lambda} = 1$, и

$$K_{\lambda, \eta} \neq 0 \iff \lambda \supseteq \eta \quad (\text{т. е. } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_j \quad \forall j). \quad (6-16)$$

Поэтому стандартные многочлены Шура $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m)$, где λ пробегает все диаграммы Юнга из $\leq m$ строк, выражаются через базисные мономиальные симметрические многочлены m_λ при помощи квадратной верхнетреугольной матрицы с единицами на главной диагонали:

$$s_\lambda = \sum_{\mu \triangleleft \lambda} K_{\lambda, \mu} \cdot m_\mu.$$

Поскольку такая матрица обратима над \mathbb{Z} , многочлены s_λ образуют базис \mathbb{Z} -модуля симметрических функций.

6.7.1. Пример: полные и элементарные симметрические многочлены. Многочлен Шура $s_{(k)}(x)$, отвечающий DU-орбите одностолбцового массива, т. е. диаграммы-строки

$$\lambda = (k, 0, \dots, 0) = \underbrace{\square \cdots \square}_k,$$

представляет собой полный симметрический многочлен $h_k(x)$ — сумму всех мономов общей степени k от x_1, x_2, \dots, x_m , поскольку для любого содержания η веса $|\eta| = k$ имеется ровно одна однострочная таблица, в которой все координаты выстроены монотонно¹. Симметричным образом, $s_{(1^k)}$, отвечающий DU-орбите диаграммы-столбца

$$1^k = (1, 1, \dots, 1) = \left. \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} k$$

это элементарный симметрический многочлен $e_k(x)$, т. е. сумма всех линейных по каждой переменной мономов общей степени k от x_1, x_2, \dots, x_m . Причина та же, только теперь номера переменных в таблице-столбце должны строго возрастать.

6.7.2. Пример: тождества Коши и Шура. Проинтерпретируем каждый шарик в клетке (i, j) массива a как билинейный моном $x_i y_j$ от двух наборов переменных $x = x^I = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = y^J = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Перемножая вместе все шарики массива a , мы получим (в обозначениях п° 6.7) моном $x^{a^t} y^a$. По теореме о биекции из теор. 6.1 сумма таких мономов по всем массивам a фиксированной формы $\lambda = \Phi(a)$ равна произведению многочленов Шура $s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y)$, и значит сумма мономов $x^{a^t} y^a$ по вообще всем массивам a формата $I \times J$ равна сумме таких произведений по всем диаграммам Юнга λ . С другой стороны, сумма всех мономов $x^{a^t} y^a$ по всем массивам a получается при раскрытии скобок в произведении бесконечных геометрических прогрессий

$$\prod_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (1 + x_i y_j + (x_i y_j)^2 + (x_i y_j)^3 + \dots)$$

¹эквивалентно: DU-орбита одностолбцового массива веса k образована всеми возможными расположениями k шариков по m ящикам

(выбирая из (i, j) -того сомножителя слагаемое $(x_i y_j)^{a(i,j)}$ мы получаем в точности моном $x^{a^t} y^a$, отвечающий массиву a). Таким образом, мы приходим к тождеству Коши:

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) \cdot s_{\lambda}(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} \quad (6-17)$$

Если взять $I = J$, ограничиться только симметричными массивами $a = a^t$, положить $x = y = \xi$ и извлечь из каждого a -монома корень

$$\xi^a \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\xi^{a^t} \xi^a} = \sqrt{x^{a^t} y^a} \Big|_{x=y=\xi},$$

то, суммируя по всем симметричным массивам a заданной формы λ , мы получим $\sigma_{\lambda}(\xi)$, а суммируя по вообще всем симметричным массивам a — сумму $\sum_{\lambda} \sigma_{\lambda}(\xi)$. Тот же результат получится при раскрытии скобок в произведении прогрессий

$$\prod_k (1 + \xi_k + (\xi_k)^2 + (\xi_k)^3 + \dots) \cdot \prod_{i < j} (1 + \xi_i \xi_j + (\xi_i \xi_j)^2 + (\xi_i \xi_j)^3 + \dots).$$

Мы получаем тождество Шура:

$$\sum_{\lambda} s_{\lambda}(\xi) = \prod_i \frac{1}{1 - \xi_i} \cdot \prod_{i < j} \frac{1}{1 - \xi_i \xi_j}. \quad (6-18)$$

6.8. Произведения. Произведение общих полиномов Шура $s_M(x) \cdot s_N(x)$ также является полиномом Шура для DU-множества, состоящего из всевозможных массивов вида ab размера $(2n) \times m$, получающихся приписыванием какого-нибудь массива $b \in N$ справа к какому-нибудь массиву¹ $a \in M$. Множество таких массивов естественно обозначить через $M \otimes N$ и называть тензорным произведением DU-множеств M, N . Итак,

$$s_M(x) \cdot s_N(x) = \left(\sum_{a \in M} x^a \right) \cdot \left(\sum_{b \in N} x^b \right) = \sum_{\substack{a \in M \\ b \in N}} x^{ab} = \sum_{c \in M \otimes N} x^c.$$

Формулу вида (6-14), раскладывающую произведение стандартных полиномов Шура $s_{\lambda}(x)$ по базису $s_{\lambda}(x)$, даёт знаменитая

ТЕОРЕМА 6.2 (ПРАВИЛО ЛИТТЛВУДА – РИЧАРДСОНА)

Для любых диаграмм λ, μ

$$s_{\lambda}(x) \cdot s_{\mu}(x) = \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^{\nu} \cdot s_{\nu}(x),$$

где суммирование происходит по всем диаграммам ν , получающимся добавлением $|\mu|$ клеток к диаграмме λ , а коэффициент $c_{\lambda\mu}^{\nu}$ равен количеству заполнений этих дописанных клеток μ_1 единицами, μ_2 двойками, μ_3 тройками и т. д., так что вдоль строк «косой диаграммы» $\nu \setminus \lambda$ числа возрастают нестрого, а вдоль столбцов — строго (как в таблице Юнга), и одновременно слово, получающееся при прочтении этой «косой диаграммы» строку за строкой справа налево сверху вниз, содержит в каждом своём начальном куске единиц не меньше, чем двоек, двоек не меньше, чем троек и т. д. (как в п° 6.3.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны подсчитать в DU-множестве $O_{\lambda} \otimes O_{\mu}$ количество DU-орбит, которые уплотняются влево до стандартной орбиты O_{ν} . Пусть массив ab лежит в такой орбите. Поскольку массивы a, b получены из биплотных массивов λ, μ вертикальными операторами, оба они плотны влево и имеют I -веса λ и μ соответственно. Заметим, что действие вертикальной

¹при этом вертикальный J -алфавит не меняется, а горизонтальный I -алфавит заменяется дизъюнктивным объединением I -алфавитов массивов a и b

уплотняющей операции D_j на «толстый» массив ab состоит либо в её действии отдельно на¹ b , либо в её действии отдельно на² a . Поэтому при уплотнении вниз «толстого» массива ab мы получим массив вида $a'b'$, в котором a' плотен вниз, и оба массива a' , b' по прежнему плотны влево и имеют I -веса λ , μ . Таким образом, a' биplotен формы λ . Если форма массива $a'b' = \lambda b'$ равна ν , то строки горизонтальной развёртки массива b' — это выровненные по левому краю строки «косой таблицы» $\nu \setminus \lambda$, заполненные именно так, как требует правило Литтлвуда–Ричардсона (первое, «табличное», ограничение выражает плотность вниз «толстого» массива ab , а второе, «словестное», ограничение выражает, согласно п° 6.3.3, плотность влево массива b'). \square

УПРАЖНЕНИЕ 6.4. Пользуясь правилом Литтлвуда–Ричардсона вычислите в Λ_3 произведения $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$ и $s_{2,1}^2$. В частности, убедитесь непосредственно, что в первом случае «честное» и «халявное»³ вычисления приводят к одному и тому же результату.

УПРАЖНЕНИЕ 6.5. Выведите из правила Литтлвуда–Ричардсона правила Пьери для умножения полиномов Шура на элементарные и полные симметрические многочлены:

$$s_\lambda \cdot e_k = s_\lambda \cdot s_{(1^k)} = \sum_{\mu} s_{\mu} \quad (6-19)$$

$$s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)} = \sum_{\nu} s_{\nu} \quad (6-20)$$

где μ и ν пробегают все диаграммы, которые можно получить присыванием k новых клеток к диаграмме λ так, чтобы никакие две новые клетки не попали в одну строку μ и в один столбец ν .

6.9. Выражение e_λ и h_λ через s_λ . Для каждого весового вектора $\eta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ можно образовать многочлены $e_\eta = e_{\eta_1} e_{\eta_2} \cdots e_{\eta_r}$ и $h_\eta = h_{\eta_1} h_{\eta_2} \cdots h_{\eta_r}$ — произведения многочленов $e_k(x) = s_{(1^k)}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $h_k(x) = s_{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ из примера п° 6.7.1. По инерции, их тоже называют элементарными и полными. Многочлен

$$h_\eta = s_{(\eta_1)} s_{(\eta_2)} \cdots s_{(\eta_r)} = s_{O_{(\eta_1)} \otimes O_{(\eta_2)} \otimes \cdots \otimes O_{(\eta_r)}}$$

есть многочленами Шура DU-множества $O_{(\eta_1)} \otimes O_{(\eta_1)} \otimes O_{(\eta_2)} \otimes \cdots \otimes O_{(\eta_r)}$, и его разложение (6-14) по базису s_λ имеет вид

$$h_\eta = \sum_{\nu} K_{\nu, \eta} \cdot s_{\nu}, \quad (6-21)$$

поскольку орбиты формы ν в произведении одностолбцовых массивов с I -весами $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ взаимно однозначно соответствуют своим нижним концам — таблицам формы ν и содержания η . Многочлен

$$e_\eta = s_{(1^{\eta_1})} s_{(1^{\eta_2})} \cdots s_{(1^{\eta_r})} = s_{O_{(1^{\eta_1})} \otimes O_{1^{\eta_2}} \otimes \cdots \otimes O_{(1^{\eta_r})}}$$

отвечает DU-множеству $O_{(1^{\eta_1})} \otimes O_{(1^{\eta_2})} \otimes \cdots \otimes O_{(1^{\eta_r})}$. Каждый массив в этом множестве имеет $|\eta|$ столбцов, разбитых на вертикальные подмассивы $a_1 a_2 \dots a_r$ ширины $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, причём в каждом столбце находится ровно один шар, и j -номера этих шаров строго возрастают внутри каждого вертикального подмассива a_i . При уплотнении вниз мы получим массив $a'_1 a'_2 \dots a'_r$ в котором все шары выстроены в несколько плотных цепочек, идущих параллельно диагонали $i = j$, так что в первом подмассиве a'_1 такая цепочка стартует из левого нижнего угла, а в каждом следующем либо продолжает предыдущую цепочку, либо начинает новую, опять таки, из левого нижнего угла. Таким образом, каждый подмассив a'_i привносит не более одного шара в каждую компоненту J -веса. Если суммарный J -вес при этом получится ν , то записывая в каждую строку диаграммы ν последовательно номера i тех подмассивов a'_i , которые дают вклад в эту компоненту J -веса, мы получим таблицу содержания η и формы $\bar{\nu}$, сопряжённой к форме ν :

¹если самый правый свободный шар при паросочетании внутри «толстого» массива ab лежит в b , то он подавно будет самым правым свободным шаром и для паросочетания, установленного отдельно внутри b

²если в b нет свободных шаров при паросочетании внутри «толстого» массива ab

³т. е. применяющее правило теор. 6.2 не к $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$, а к $s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$, что не всё равно

номера будут строго возрастать по строкам диаграммы ν и неубывать по столбцам, и каждый номер i будет представлен ровно в η_i различных строчках. Итак,

$$e_\eta = \sum_{\nu} K_{\bar{\nu}, \eta} \cdot s_\nu . \quad (6-22)$$

УПРАЖНЕНИЕ 6.6. Выведите разложения (6-22), (6-21) из формул Пьери (6-19), (6-20).

Оглавление

Раздел 1	
Полилинейная алгебра	2
§1. Тензорные произведения модулей	2
1.1. Полилинейные отображения	2
1.2. Универсальное полилинейное отображение	3
1.3. Тензорное произведение модулей	4
1.4. Изоморфизм $U^* \otimes V \simeq \text{Hom}(U, V)$ и разложимые операторы	6
1.5. Тензорные произведения абелевых групп	7
1.6. Канонические изоморфизмы	8
§2. Тензорная алгебра векторного пространства	10
2.1. Свободная ассоциативная алгебра $T(V)$	10
2.2. Двойственность	10
2.3. Частичные свертки	11
2.4. Линейный носитель тензора	12
2.5. Условия (косо) симметричности	12
2.6. Симметрическая алгебра пространства V	13
2.7. Внешняя алгебра пространства V	14
§3. Поляризация полиномов	16
3.1. Симметрические и кососимметрические тензоры	16
3.2. Поляризация коммутативных многочленов	17
3.3. Поляры.	18
3.4. Частные производные в симметрической алгебре.	19
3.5. Поляризация грассмановых многочленов	21
3.6. Частные производные в грассмановой алгебре.	23
§4. Исчисление формальных степенных рядов (напоминания)	24
4.1. Алгебраические операции над рядами.	24
4.2. Дифференциальное исчисление.	24
4.3. Интегральное исчисление.	26
4.4. Бином Ньютона.	27
4.5. Действие $\mathbb{Q}[[d/dt]]$ на $\mathbb{Q}[t]$	30
4.6. Числа Бернулли.	32
§5. Симметрические функции	34
5.1. Симметрические и кососимметрические многочлены	34
§6. Исчисление массивов, таблиц и диаграмм	36
6.1. Массивы.	36
6.2. Элементарные операции.	36
6.3. Уплотнение массивов.	38
6.4. Теорема о биекции.	40
6.5. DU-множества и DU-орбиты.	42
6.6. Действие симметрической группы $S_m = \text{Aut}(J)$	43
6.7. Полиномы Шура.	44
6.8. Произведения.	46
6.9. Выражение e_λ и h_λ через s_λ	47
Оглавление	49