Математический анализ — II

Листок 6

1) Вычислите интеграл Лебега по лучу $(0, \infty)$ от функций:
   а) $f(x) = e^{-[x]}$;
   б) $f(x) = \frac{1}{[x+1]\cdot[x+2]}$;
   в) $f(x) = \frac{1}{[x]!}$.
   Через $[x]$ обозначается целая часть числа x.
2) Вычислите интеграл Лебега по отрезку $[0, \pi]$ от функции
   а) $f(x) = \sin x$;
   б) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \text{ рационально;} \\ \cos x, & \text{если } x \text{ иррационально;} \end{cases}$
   в) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } \cos x \text{ рационально;} \\ \sin^2 x, & \text{если } \cos x \text{ иррационально.} \end{cases}$
3) Являются ли суммируемыми следующие функции:
   а) На прямой $(-\infty, \infty)$: характеристическая функция множества действительных чисел, в десятичной записи которых не встречается цифра 3.
   б) На луче $(0, \infty)$: функция $f(x) = \frac{\{x\}}{[x+1]}$ (через $\{x\}$ обозначается дробная часть числа x).
   в) На интервале $(0, 1)$: функция, равная номеру позиции первой девятки в десятичной записи числа; если девяток нет, то первой восьмерки, и т. д. до единицы.
4) Пусть X — пространство с мерой μ, причем $\mu(X) < \infty$. Докажите, что измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}$ суммируема тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant n\}.$$

5) Пусть X — пространство с мерой μ ($\mu(X)$ может быть бесконечна). Докажите, что измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}$ суммируема тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant 2^n\}.$$

6) При каких значениях параметров α и β функция $f(x) = x^\alpha \sin x^\beta$
   а) суммируема?
   б) несобственно интегрируема?
7) Пусть f_n — простая функция на $[0, 1]$, заданная формулой $f_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$. Докажите, что в пространстве простых суммируемых функций на $[0, 1]$ с метрикой $d_1(f, g) = \int\limits_{[0,1]} |f(x) - g(x)| d\mu$ (где μ — мера Лебега) последовательность (f_n) является фундаментальной, но не имеет предела.
8) Докажите, что для любой суммируемой функции на пространстве X с σ-аддитивной мерой μ сопоставление $A \mapsto \int\limits_A f(x) d\mu$ задает заряд на σ-алгебре измеримых подмножеств
   а) в случае, если мера μ является конечной;
   б) в случае, если мера μ является σ-конечной.
9) *Вариацией* функции f на отрезке $[a, b]$ называется точная верхняя грань сумм

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})|$$

   по всем конечным наборам $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ таким, что $a = \xi_0 \leqslant \xi_1 \leqslant \dots \leqslant \xi_n = b$.
   а) Докажите, что функция имеет конечную вариацию по любому отрезку тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде разности двух монотонно неубывающих функций.
   б) Докажите, что формула $\nu([, b)) = f(b) - f(a)$ задает σ-аддитивный заряд на полукольце полуинтервалов тогда и только тогда, когда функция f непрерывна слева и имеет ограниченную вариацию на любом отрезке.