Алгебра. Листок 4.

◇ **4.1.** *а) Выпишите все 2×2 матрицы с коэффициентами из поля $\mathbb{F}_2$ и ненулевым определителем.*
б) Сколько всего имеется 2×2 матриц с коэффициентами из поля $\mathbb{F}_p$ и ненулевым определителем?
**в) Сколько всего имеется 3×3 матриц с коэффициентами из поля $\mathbb{F}_2$ и ненулевым определителем?*
**г) Сколько всего имеется 2×2 матриц с коэффициентами из поля $\mathbb{F}_p$ и фиксированным ненулевым определителем?*

◇ **4.2.** *Как изменится определитель матрицы, если ее симметрично отразить относительно ее побочной диагонали (т.е. диагонали SW-NO)?*

◇ **4.3.** *Докажите, что определитель матрицы с двумя одинаковыми строками равен нулю.*

◇ **4.4.** *Докажите, что если сумма элементов любой строки квадратной матрицы равна нулю, то определитель равен нулю.*

◇ **4.5.** *Дана блочная матрица $C = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где A и B — квадратные атрицы, а левый нижний угол заполнен нулями. Докажите, что $\det C = \det A \det B$.*

◇ **4.6.** *Вычислите определитель $n\times n$ матрицы $A = (a_{i,j})$, если*
а) $a_{i,j} = \min(i,j)$; *б) $a_{i,j} = \max(i,j)$;* *в) $a_{i,j} = \begin{cases} n & \text{если} \quad i = j; \\ -1 & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$* *г) $a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{если} \quad i = j; \\ 1 & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$*

◇ **4.7.** *Две строки матрицы 3×3 заполнены целыми числами, причем НОД чисел, стоящих в каждой строке, равен единице. Верно ли, что третью строку этой матрицы всегда можно заполнить целыми числами так, чтобы определитель оказался равным единице?*

◇ **4.8.** *Дана матрица $A = (a_{i,j})$. Матрица, составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы A, называется присоединенной к A матрицей и обозначается $\widehat{A}$.*
а) Пусть матрица A' получена из матрицы A элементарным преобразованием: прибавлением к i-ой строке j-ой строки, умноженной на λ. Докажите, что присоединенные матрицы $\widehat{A'}$ и $\widehat{A}$ тоже получаются одна из другой элементарным преобразованием (каким?).
б) Докажите, что если определитель матрицы равен нулю, то определитель присоединенной матрицы также равен нулю.
**в) Как связаны между собой определители матриц A и $\widehat{A}$?*

◇ **4.9.** *а) Докажите, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен 0.*
б) Докажите, что определитель кососимметрической матрицы размером 4×4 является полным квадратом.
***в) Докажите, что определитель кососимметрической матрицы четного порядка является полным квадратом.*

◇ **4.10. *** *Вершины некоторого дерева занумерованы числами от 1 до n. Матрица $A = (a_{i,j})$ составлена по следующему правилу: диагональные элементы $a_{i,i}$ равны числу ребер, сходящихся в i-ой вершине, а остальные элементы $a_{i,j}$ равны -1, если вершины i и j соединены ребром, и нулю в противном случае. а) Докажите, что $\det A = 0$.*
б) Докажите, что все алгебраические дополнения к диагональным элементам $A_{i,i} = 1$.
***в) Обобщите эти результаты на случай произвольного связного графа: докажите, что и в этом случае $\det A = 0$, а все $A_{i,i}$ отличны от нуля и равны между собой, причем значение 1 бывает только в случае дерева.*

◇ **4.11.** *Система линейных уравнений имеет бесконечно много решений. Верно ли, что каждое неизвестное может принимать бесконечно много значений?*

◇ **4.12.** *Докажите, что неоднородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда соответствующая однородная система (т.е. полученная из исходной заменой всех свободных членов нулями) имеет только нулевое решение.*

◇ **4.13. *** *На клетчатой бумаге нарисован по линиям сетки прямоугольник, и в клеточках, граничащих с контуром прямоугольника с внешней стороны, написаны произвольные числа. Докажите, что во всех клеточках прямоугольника можно расставить числа таким образом, чтобы каждое из поставленных чисел равнялось бы среднему арифметическому его четырех соседей.*

◇ **4.14.** *На ребрах тетраэдра написаны числа $b_1,\dots,b_6$. Требуется написать на каждой грани тетраэдра по одному числу таким образом, чтобы число, написанное на каждом ребре, оказалось равным сумме двух чисел, написанных на гранях, содержащих это ребро. При каких условиях на числа $b_1,\dots,b_6$ эта задача имеет решение? Единственно ли это решение при данных $b_1,\dots,b_6$? Если нет, то укажите формулы, которые позволяют найти все решения, зная какое-нибудь одно.*

◇ **4.15.** *На вершинах куба написаны числа $b_1,\dots,b_8$. Требуется написать на каждой грани куба по одному числу таким образом, чтобы число, написанное в каждой вершине, оказалось равным сумме трех чисел, написанных на гранях, содержащих эту вершину. При каких условиях на числа $b_1,\dots,b_8$ эта задача имеет решение? Единственно ли это решение при данных $b_1,\dots,b_8$? Если нет, то укажите формулы, которые позволяют найти все решения, зная какое-нибудь одно.*

◇ **4.16.** *У системы уравнений* $\begin{cases} 12.37\,x + 10.55\,y + 2.24\,z + 7.18\,t - 13.94\,w &= 5.61 \\ -7.46\,x + 11.23\,y + 10.23\,z + 17.34\,t - 5.76\,w &= 4.12 \\ 34.08\,x - 12.17\,y + 24.47\,z - 21.73\,t + 21.68\,w &= 34.03 \end{cases}$ *известны два ее решения:* $x=0,\ y=1,\ z=1,\ t=-1,\ w=0$ *и* $x=1,\ y=0,\ z=0,\ t=1,\ w=1$ *(проверьте!).*
а) Найдите какое-нибудь решение системы, у которого значение неизвестной x больше тысячи.
б) Найдите какое-нибудь решение системы, у которого значение неизвестной y больше тысячи.
в) Найдите какое-нибудь решение системы, у которого значения всех неизвестных иррациональны.

◇ **4.17.** *Возможны ли следующие ситуации? Если нет, то докажите это, а если да — приведите пример.* *а) Система $Ax=b$ имеет решения, а система $Ax=c$ — нет.*
б) Система $Ax=b$ имеет единственное решение, а система $Ax=c$ — бесконечно много решений.
в) Система $Ax=0$ имеет ненулевые решения, а система $Ax=b$ имеет единственное решение.
г) Система $Ax=b$ не имеет решений ни при каком векторе b.

◇ **4.18.** *В этой задаче мы рассматриваем целочисленные 2×2 матрицы и их элементарные преобразования над строками и над столбцами над кольцом целых чисел.*
а) Докажите, что любую матрицу с определителем 1 можно перевести в единичную матрицу.
б) Докажите, что любую матрицу с определителем 6 можно перевести в матрицу $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
в) Можно ли перевести матрицу $\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *в матрицу* $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$*?*
г) Докажите, что любую матрицу с определителем 12 можно перевести в одну из двух матриц из предыдущей задачи.
**д) Сформулируйте и докажите теорему о приведении целочисленной 2×2 матрицы к диагональному виду элементарными преобразованиями (над строками и над столбцами) над $\mathbb{Z}$.*

◇ **4.19.** *Докажите, что ранг $m\times n$ матрицы $A=(a_{i,j})$ равен 1 тогда и только тогда, когда существуют такие числа $x_1,\dots,x_m$ и $y_1,\dots,y_n$, что $a_{i,j}=x_iy_j$.*

◇ **4.20.** *Известно, что строки матрицы $A=(a_{i,j})$ с номерами $i_1,\dots,i_k$ линейно независимы, и что стролбцы этой матрицы с номерами $j_1,\dots,j_k$ линейно независимы. Известно, что $\operatorname{rank} A=k$. Докажите, что элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют базисный минор.*

◇ **4.21.** *Докажите, что любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1 и нельзя представить в виде суммы меньшего числа матриц ранга 1.*