Логика и алгоритмы -2010. Задание 5

72. Докажите, что множество $\{X \mid X \subseteq \mathbf{N} \wedge |X|=2\}$ счетно.
73. Докажите, что множество всех интервалов в **Q** (множестве рациональных чисел) счетно.
74. Дано счетное множество A. Докажите, что в A существует счетная последовательность попарно непересекающихся бесконечных подмножеств: $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ (т.е. $A_i \cap A_j = \varnothing$) при $i \neq j$.
75. Дано счетное множество A.
а) Докажите, что в A существует счетная строго возрастающая последовательность бесконечных подмножеств: $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$
б) Докажите, что в A существует счетная строго возрастающая последовательность подмножеств: $A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$, такая что все множества $A_{n+1} \setminus A_n$ бесконечны.
76. а) Докажите, что если $A \sim A'$, $B \sim B'$ и $A \cap B = A' \cap B' = \varnothing$, то $A \cup B \sim A' \cup B'$.
б) Что можно утверждать в случае, если $A \sim A'$, $B \sim B'$ и $A \cap B \neq \varnothing$?
77. Докажите, что если $A \sim A'$ и $B \sim B'$, то $A \times B \sim A' \times B'$.
78. Дана конечная последовательность счетных множеств $A_1, \ldots, A_n$. Докажите что произведение $A_1 \times \ldots \times A_n$ счетно.
79. Пусть $f: X \to Y$ - функция; $A, B \subseteq X$. Докажите утверждения:
   а) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
   б) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$,
   в) $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$.
80. Пусть $f: X \to Y$ - инъекция; $A, B \subseteq X$. Докажите, что
   а) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
   б) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.
81. Пусть $f: X \to Y$ - функция, такая что $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ для всех $A, B \subseteq X$. Докажите, что f - инъекция.
82. *Определение. Пусть* $f: X \to Y$ - *функция,* $U \subseteq Y$. ***Полным прообразом множества*** U ***относительно*** f *называется множество* $f^{-1}(U) := \{x \mid f(x) \in U\}$.
Пусть $f: X \to Y$ - функция; $A, B \subseteq Y$. Докажите утверждения:
   а) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
   б) $f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
   в) $f^{-1}(A \setminus B) \subseteq f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.