Домашнее задание

Листок Ф1
(10.2010)

Задача 1. Пусть $\omega \in \Lambda^n(V)$ ненулевая форма объема. Доказать, что соответствие $v \mapsto i_v(\omega)$ задает изоморфизм между пространствами V и $\Lambda^{n-1}(V)$.

Задача 2. Сколько симплектически неэквивалентных плоскостей размерности k имеет линейное симплектическое пространство большей размерности?

Задача 3. Найти форму $\sigma = i_v\omega$, где $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ дифференциальная форма на $\mathbb{R}^3$, $v = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$. Чему равен интеграл формы σ по сфере единичного радиуса с центром в нуле?

Задача 4. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ гладкая функция, $v = \mathrm{grad}(f) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\omega = dx_1 \wedge .... \wedge dx_n$. Найти $L_v\omega$.

Задача 5. Пусть f гладкая функция на пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $q_1, ..., q_n$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n$ многообразие Γ_f, заданное уравнениями $p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}$. Доказать, что интеграл формы $\sum p_i dq_i$ по любой замкнутой кривой на Γ_f равен нулю.

Задача 6. Пусть x неособая точка для функции Гамильтона H на симплектическом многообразии (то есть $dH(x) \neq 0$). Доказать, что вектор $v_H(x) \in T_xM$ гамильтонова векторного поля v_H содержится в косоортогональном дополнении к касательному пространству к линии уровня $H = H(x)$.

Задача 7. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$ с координатами $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n, t)$. Пусть H гладкая функция на этом пространстве. Доказать, что экстремали функционала $\int \sum p_i dq_i - H dt$ на кривых вида $(p(t), q(t), t)(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$ с ограничениями $q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1$ являются интегральными кривыми для уравнений Гамильтона с гамильтонианом H.