Алгебра.

Введение.

Это записки лекций, прочитанных в октябре[1]. В них речь пойдет, в основном, о решении линейных уравнений. Мы все время будем подразумевать, что зафиксировано некоторое кольцо R (как мы договаривались ранее, коммутативное, ассоциативное и с единицей), в котором будут лежать коэффициенты наших уравнений и в котором мы будем искать их решения; во многих случаях нам придется ограничиться случаем, когда кольцо R является полем, тогда мы будем обозначать это поле $\mathbb{K}$. Элементы этого кольца R (или, соответственно, поля $\mathbb{K}$) мы будем для краткости называть просто числами (иногда их еще по-старинному называют*скалярами*).

В этой части записок задачи из листочков, как правило, не включены в текст лекций; тем не менее задачи соответствующих листочков по-прежнему представляют собой важнейшую часть курса.

Оглавление

4. Матрицы. Терминология.

В этом разделе нет теорем и почти нет задач, а все определения тривиальны. Наша главная задача здесь — освоить общепринятую терминологию.

Матрицей называется прямоугольная таблица, заполненная произвольными математическими объектами, называемыми ее *элементами*. Удобно обозначать матрицу какой-нибудь заглавной латинской буквой, а ее элементы — той же самой строчной латинской буквой с двумя индексами, указывающими номер строки и столбца, в котором стоит этот элемент: таким образом элемент матрицы A, стоящий на пересечении i-ой строки и j-ого столбца обозначается a_{ij}. (Строки нумеруются сверху вниз, а столбцы слева направо.) Про матрицу с m строками и n столбцами часто говорят, что она имеет размеры $m \times n$; иногда для краткости говорят "$m \times n$ матрица". Матрица вполне может иметь только одну строку или только один столбец; в первом случае такую матрицу иногда называют *вектор-строка*, а во втором — *вектор-столбец*.

Как правило, мы в этих лекциях будем заниматься матрицами, элементы которых берутся из некоторого заранее фиксированного кольца R (или поля $\mathbb{K}$). Множество матриц размером $m \times n$ с

[1] Кроме последних двух лекций, которые появятся в самое ближайшее время.

элементами из фиксированного кольца R будем обозначать как $\mathrm{Mat}(m,n,R)$. На этом множестве можно естественно ввести операции сложения и умножения на число следующим образом. Суммой матриц $A=(a_{i,j})$ и $B=(b_{i,j})$ называется матрица, у которой на пересечении i-ой строки и j-ого столбца стоит число $a_{i,j}+b_{i,j}$: $A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})$. Матрица λA, где $\lambda\in R$, — это матрица, у которой на пересечении i-ой строки и j-ого столбца стоит число $\lambda a_{i,j}$: $\lambda A=(\lambda a_{i,j})$. Матрица из $\mathrm{Mat}(m,n,R)$, состоящую из одних нулей, называется *нулевой* матрицей. Мы будем обозначать ее тем же самым символом 0, поскольку из контекста обычно бывает понятно, о чем идет речь — о числе нуль или о нулевой матрице. Понятно, что для любой матрицы $A=(a_{i,j})$ имеется матрица $-A$, состоящая из элементов $-a_{i,j}$, так что $A+(-A)=0$; при этом, конечно, $-A=(-1)A$. Выделим основные свойства сложения матриц и умножения матриц на число. Здесь $A,B,C\in\mathrm{Mat}(m,n,R)$, $\lambda,\mu\in R$.

$$\begin{array}{llll} 1) & A+B=B+A & 5) & (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A \\ 2) & (A+B)+C=A+(B+C) & 6) & \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B \\ 3) & A+0=0+A=A & 7) & (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A) \\ 4) & A+(-A)=0 & & \end{array} \tag{4.1}$$

Задача 4.1. *Докажите эти свойства. (Надо только объяснить, как они следуют из соответствующих аксиом кольца.)*

Если число строк равно числу столбов, то матрицу называют квадратной. У квадратной матрицы важную роль играет *главная диагональ* — это диагональ в направлении NW-SO, т.е. от северо-запада к юго-востоку (в стандартной географической нотации, т.е. когда север расположен сверху листа, а запад — слева). Другими словами, главная диагональ $n\times n$ матрицы A — это элементы $a_{1,1},a_{2,2},\dots,a_{n,n}$.

Пусть $B=(b_{i,j})$ — некоторая матрица, имеющая m строк и n столбцов. *Транспонированной* к B матрицей называется матрица B^T, имеющая n строк и m столбцов, так что на пересечении i-ой строки и j-ого столбца в матрице B^T стоит элемент $b_{j,i}$. Другими словами, строки матрицы B становятся столбцами матрицы B^T и наоборот. Для квадратной матрицы транспонирование удобно наглядно представлять себе как зеркальное отражение относительно главной диагонали.

Задача 4.2. *Докажите, что* $(A+B)^T=A^T+B^T$ *и* $(\lambda A)^T=\lambda A^T$.

Квадратная матрица B называется *симметрической*, если $B=B^T$. Это означает, что для любых номеров i и j $b_{i,j}=b_{j,i}$.

Квадратная матрица B называется *кососимметрической*, если $B=-B^T$. Это означает, что для любых номеров i и j $b_{i,j}=-b_{j,i}$; отметим, что в случае поля характеристики отличной от 2 (или кольца, в котором $1+1$ не является нулем или делителем нуля) из этого следует, что на главной диагонали у кососимметрической матрицы стоят нули.

Задача 4.3. *Докажите, что если в кольце* $1+1$ *не является нулем или делителем нуля, то любую квадратную матрицу можно однозначно представить в виде суммы симметрической и кососимметрической.*

Квадратная матрица $A=(a_{i,j})$ называется *верхнетреугольной,* если $a_{i,j}=0$ при $i>j$. Другими словами, все элементы ниже главной диагонали у такой матрицы равны нулю. Матрица, транспонированная к верхнетреугольной, называется *нижнетреугольной.*

Квадратная матрица $A=(a_{i,j})$ называется *диагональной,* если $a_{i,j}=0$ при $i\neq j$. Другими словами, у диагональной матрицы отличны от нуля только элементы главной диагонали.

Диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят только единицы, называется *единичной* матрицей и в наших лекциях будет обозначаться E (в некоторых книжках принято обозначение I). Для элементов единичной матрицы удобно зафиксировать стандартное обозначение $\delta_{i,j}$ (называемое дельта-символом Кронекера), так что

$$\delta_{i,j}=\begin{cases} 1 & \text{если} \quad i=j \\ 0 & \text{если} \quad i\neq j. \end{cases} \tag{4.2}$$

Матрица λE ($\lambda \in R$) иногда называется *скалярной* матрицей.

Задача 4.4. *Пусть $R = \mathbb{F}_p$. Сосчитайте число симметрических, кососимметрических (при $p \neq 2$), верхнетреугольных, диагональных и скалярных матриц порядка n.*

?блочные матрицы

5. Линейные системы и определители: мотивировка.

Самые простые уравнения, которые можно пытаться решать, это линейные уравнения. Сейчас мы обсудим наиболее простой случай, когда имеется система n линейных уравнений с n неизвестными, коэффициенты которой принадлежат некоторому полю $\mathbb{K}$. В общем случае такая система имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n, \end{array} \right. \tag{5.1}$$

где все $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ и $b_i \in \mathbb{K}$. В банальном случае $n = 2$ каждый школьник может решить такую систему многими способами. Мы выберем следующий подход: найдем, на какие числа надо умножить каждое из уравнений системы

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by = e \\ cx + dy = f, \end{array} \right. \tag{5.2}$$

чтобы после сложения домноженных уравнений одно из неизвестных (скажем, y) пропало бы, и в результате осталось уравнение с одним неизвестным x. Ответ легко угадать: первое уравнение надо умножить на d, а второе — на $-b$. В результате сложения домноженных уравнений получится уравнение

$$(ad - bc)x = ed - bf. \tag{5.3}$$

Если коэффициент при неизвестным x, т.е. $ad - bc$, отличен от нуля, то, разделив на него, получим искомое значение x. Аналогично, легко угадать коэффициенты, с помощью которых тем же методом исключится неизвестное x, и для y тогда получится аналогичное уравнение

$$(ad - bc)y = af - ec. \tag{5.4}$$

В результате мы получаем систему, которая является *следствием* системы (5.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} (ad - bc)x = ed - bf \\ (ad - bc)y = af - ec. \end{array} \right. \tag{5.5}$$

Тем самым, если число $D = ad - bc$ отлично от нуля, то наша система имеет единственное решение

$$\left\{ \begin{array}{l} x = D_1/D \\ y = D_2/D \end{array} \right. \qquad \text{где} \qquad \begin{array}{c} D = ad - bc \\ D_1 = ed - bf \\ D_2 = af - ec \end{array} \tag{5.6}$$

Задача 5.1. *Докажите, что если $ad - bc = 0$, то система либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений (если основное поле бесконечно).*

Задача 5.2. *(Из 8 класса.) Докажите, что график дробно-линейной функции*

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{5.7}$$

получается из стандартной гиперболы $y = 1/x$ растяжением по оси OY и параллельным переносом. Найдите коэффициент растяжения.

Задача 5.3. *(Из 9 класса.) Найдите площадь параллелограмма, двумя сторонами которого являются векторы с координатами* $(a;b)$ *и* $(c;d)$.

Задача 5.4. ** Попробуйте придумать единое объяснение результатов предыдущих трех задач.*

Попробуем теперь решить тем же способом систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{5.8}$$

Требуется найти три числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (точнее, три выражения, зависящие от коэффициентов системы), таких что после сложения домноженных на эти числа уравнений получится уравнение, содержащее только одно неизвестное, скажем, x_1. Как и в раньше, желательно, чтобы полученные выражения не содержали деления, чтобы не потребовалось отдельно разбирать случай равенства знаменателя нулю. Угадать выражения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ уже довольно трудно, но можно найти их исходя из требования, чтобы коэффициенты при x_2 и x_3 обратились в нуль. Это дает два уравнения:

$$\begin{cases} a_{1,2}\lambda_1 + a_{2,2}\lambda_2 + a_{3,2}\lambda_3 = 0 \\ a_{1,3}\lambda_1 + a_{2,3}\lambda_2 + a_{3,3}\lambda_3 = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

На первый взгляд в этой системе три неизвестных λ_1, λ_2 и λ_3, но для отношений λ_1/λ_3 и λ_2/λ_3 получится как раз уже решенная нами система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{1,2}\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + a_{2,2}\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = -a_{3,2} \\ a_{1,3}\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + a_{2,3}\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = -a_{3,3}. \end{cases} \tag{5.10}$$

Задача 5.5. *Найдите требуемые коэффициенты и выпишите получающееся уравнение для* x_1.

Задача 5.6. *Проделайте аналогичные вычисления для неизвестной* x_2 *или* x_3.

Если вы правильно решили предыдущие две задачи, то в каждом случае при неизвестных x_1, x_2 и x_3 получился (с точностью до знака) один и тот же коэффициент. Вот он:

$$D = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \tag{5.11}$$

Более того, как и при $n = 2$, правые части полученных уравнений (мы снова обозначим их, соответственно, D_1, D_2 и D_3, но выписывать не будем) тоже имеют очень похожую структуру: шесть произведений по три сомножителя в каждом, причем три произведения стоят с плюсом, а три — с минусом.

Мы видим, что, как и в случае $n = 2$, следствием системы (5.8) является система

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1 \\ Dx_2 = D_2 \\ Dx_3 = D_3. \end{cases} \tag{5.12}$$

Тем самым, если число D (5.11) отлично от нуля, то система (5.8) имеет единственное решение.

Задача 5.7. *Верно ли, что если число* D *(5.11) равно нулю, то система (5.8) либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений (если основное поле бесконечно)?*

Мне неизвестно обозримое прямое вычислительное решение этой задачи; спустя некоторое время положительный ответ легко докажется для произвольного n.

Теперь, вероятно, уже понятно, что будет происходить дальше. Имея в руках формулы типа (5.12) для решения системы $n-1$ уравнения с $n-1$ неизвестным, можно решать систему n уравнения с n неизвестными уже опробованным нами способом. Для этого надо найти такие коэффициенты, что после умножения на них уравнений и сложения полученных уравнений останется уравнение только с одной переменной. Как мы видели, для нахождения таких коэффициентов как раз требуется иметь формулы для решения системы на единицу меньшего порядка. Тем самым мы приведем систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array} \right. \tag{5.13}$$

к виду

$$\left\{ \begin{array}{c} Dx_1 = D_1 \\ Dx_2 = D_2 \\ \ldots \\ Dx_n = D_n, \end{array} \right. \tag{5.14}$$

причем выражения $D, D_1, \ldots, D_n$ окажутся многочленами от коэффициентов системы, причем весьма специального вида и довольно-таки похожими друг на друга.

Можно предположить, что для того, чтобы разобраться в ситуации и доказать какой-нибудь точный результат, надо в первую очередь хорошо понять, как устроен многочлен D; как мы видели, выражения $D_1, \ldots, D_n$ устроены очень похоже, поэтому есть надежда разобраться, как они получаются из D.

Задача 5.8. *(для храбрых) Попробуйте сделать еще один шаг и осуществить эту программу для $n = 4$, и на основании этих данных угадать общее правило образования многочлена D и получения из него $D_1, \ldots, D_n$. (Сначала имеет смысл оценить размер бедствия: угадать, сколько и каких слагаемых получится в выражении для D.)*

Теперь уже пора признаться, что D называется определителем матрицы коэффициентов системы. По-видимому, это название как раз связано с его ролью в решении и исследовании линейных систем. В следующих разделах мы дадим ему точное определение и докажем все намеченные здесь гипотезы.

6. Определители и линейные системы: теорема Крамера.

Мы не будем дословно выполнять программу, сформулированную в конце предыдущего раздела, а выберем "царский путь": сформулируем в наиболее удобном для дальнейшего изложения виде правило образования определителя и докажем некоторые его свойства, из которых потом довольно легко сможем вывести уже намеченную в предыдущем разделе теорему о сведении решения линейных систем к формулам (5.14) (она называется теоремой Крамера), а также множество других важных результатов. При этом мы уже не будем, как в прошлом разделе, ограничиваться случаем поля, а будем считать рассматривать матрицы с элементами из произвольного кольца (ассоциативного, коммутативного и с единицей).

Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы описать вид обсуждавшегося в прошлом разделе многочлена D, который, как уже было сказано, называется определителем. Как мы видели, при $n = 2, 3$ он зависел только от коэффициентов $a_{i,j}$ и представлял собой сумму некоторых произведений элементов $a_{i,j}$, причем некоторые произведения брались со знаком плюс, а некоторые со знаком минус. Закономерность образования произведений нетрудно угадать, глядя на случаи $n = 2, 3$: в каждом произведении ровно n сомножителей, подобранных таким образом, что в каждом произведении встречается ровно один коэффициент из каждого столбца и ровно один коэффициент из каждой строки. Удобно представлять себе матрицу коэффициентов в виде шахматной доски $n \times n$ клеточек; тогда каждое такое произведение соответствует решению известной задачи о расстановке n ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга.

Задача 6.1. *Сколькими способами это можно сделать?*

Нетрудно видеть, что в случае $n = 2, 3$ оказались востребованы все возможные способы; естественно предположить, что так будет и в общем случае. Для записи произведений удобно упорядочить сомножители по номерам строк (т.е. таким образом, чтобы сначала шел элемент из первой строки, затем из второй и т.д.). Тогда каждое произведение будет иметь вид

$$a_{1,i_1} a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n}, \tag{6.1}$$

где числа $i_1, i_2 \dots i_n$ представляют собой перестановку чисел $1, 2 \dots n$ (т.е. каждое число от 1 до n встречается среди чисел $i_1, i_2 \dots i_n$ ровно один раз). Теперь можно записать предварительный вид выражения D:

$$D = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{перестановкам} \\ i_1, i_2 \dots i_n}} \pm\, a_{1,i_1} a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n} \tag{6.2}$$

Осталось угадать правило выбора знака при произведении. Ответ нагляднее всего сформулировать геометрически. Для этого соединим центры клеточек, соответствующих данному произведению, $\frac{n(n-1)}{2}$ отрезками. (Некоторые из них, возможно, наложатся друг на друга.)

Задача 6.2. *Почему этих отрезков будет именно столько?*

Среди этих отрезков не будет строго горизонтальных и строго вертикальных (почему?); сосчитаем число отрезков, расположенных в направлении SW-NO, т.е. от юго-запада к северо-востоку (в стандартной географической нотации, т.е. когда север расположен сверху листа, а запад — слева). Это число называется числом *инверсий* перестановки; в зависимости от четности этого числа перестановка называется четной или нечетной. Так вот, произведения, соответствующие четным перестановкам, входят в формулу (6.2) со знаком плюс, а произведения, соответствующие нечетным — со знаком минус. (Проверьте формулы для $n = 2, 3$.)

Задача 6.3. *Найдите количество четных и количество нечетных перестановок.*

Иногда четность перестановки определяется по-другому следующим образом. *Инверсией* перестановки $i_1, i_2 \dots i_n$ называется любая пара номеров i_k, i_l, такая что $k < l$, но $i_k > i_l$. Четность перестановки — это по-прежнему четность числа ее инверсий.

Задача 6.4. *Докажите равносильность обоих определений.*

Для удобства записи формул определим число

$$\varepsilon(i_1, i_2 \dots i_n) = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка четная} \\ -1, & \text{если перестановка нечетная} \end{cases} \tag{6.3}$$

Теперь мы, наконец, готовы написать окончательное выражение для D; оно называется *определителем* матрицы $A = (a_{i,j})$ и обозначается $\det A$:

$$\det A = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{перестановкам} \\ i_1, i_2 \dots i_n}} \varepsilon(i_1, i_2 \dots i_n)\; a_{1,i_1} a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n} \tag{6.4}$$

Задача 6.5. *Придумайте, как выглядела бы формула (6.4), если бы мы в самом начале договорились упорядочивать сомножители в произведениях не по строкам, как мы это делали, а по столбцам:*

$$\det A = \sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{перестановкам}\\ i_1, i_2 \dots i_n}} ? \cdot\ a_{i_1,1} a_{i_2,2} \dots a_{i_n,n} \tag{6.5}$$

.

Вычисление определителя по формуле (6.4) довольно громоздко, поскольку число слагаемых стремительно растет с ростом n. Однако для матриц специального вида это вычисление может оказаться очень простым.

Напомним, что матрица $A = (a_{i,j})$ называется *верхнетреугольной,* если $a_{i,j} = 0$ при $i > j$. Другими словами, все элементы ниже главной диагонали у такой матрицы равны нулю.

Задача 6.6. *Докажите, что определитель верхнетреугольнной матрицы равен произведению диагональных элементов:* $\det A = a_{1,1} a_{2,2} \dots a_{n,n}$.

Задача 6.7. *Сколько имеется* 2×2 *матриц с ненулевым определителем над полем* $\mathbb{F}_2$*? Выпишите их все.*

Задача 6.8. *Сколько имеется* 2×2 *матриц с ненулевым определителем над полем* $\mathbb{F}_3$*? Каких матриц больше: с определителем* $\bar{1}$ *или с определителем* $\bar{2}$*? Почему?*

Задача 6.9. *Сколько имеется* 2×2 *матриц с ненулевым определителем над полем* $\mathbb{F}_p$*?*

Задача 6.10. *Сколько имеется* 2×2 *матриц с определителем* $\bar{1}$ *над полем* $\mathbb{F}_p$*?*

Задача 6.11. *Сколько имеется* 3×3 *матриц с ненулевым определителем над полем* $\mathbb{F}_2$*?*

Конечно, теперь хотелось бы попробовать доказать, что при любом n систему (5.13) можно равносильными преобразованиями привести к виду (5.14), и что стоящее там число D — это именно определитель матрицы A. Однако, как уже было сказано, прямым вычислением доказать это вряд ли возможно, и поэтому нам сначала придется изучить основные свойства определителя, которые на самом деле имеют намного большую ценность, чем формулы для решения системы линейных уравнений, которые мы в конце концов из них выведем.

Для формулировки первого свойства напомним определение транспонированной матрицы. Если $B = (b_{i,j})$ — некоторая матрица, имеющая m строк и n столбцов, то транспонированной к ней матрицей называется матрица B^T, имеющая n строк и m столбцов, так что на пересечении i-ой строки и j-ого столбца в матрице B^T стоит элемент $b_{j,i}$. Другими словами, строки матрицы B становятся столбцами матрицы B^T и наоборот. Для квадратной матрицы транспонирование удобно наглядно представлять себе как зеркальное отражение относительно главной диагонали (т.е. диагонали, направленной от северо-запада на юго-восток).

Свойство 1. $\det A = \det A^T$.

Задача 6.12. *Докажите это свойство.*

До сих пор мы рассматривали определитель как функцию от n^2 элементов матрицы. Оказывается, очень полезно рассмотреть, как определитель зависит от n векторных аргументов — строк матрицы A. Разумеется, с таким же успехом можно было бы рассматривать зависимость определителя и от столбцов. Поскольку при транспонировании столбцы и строки меняются местами, а определитель не меняется, мы можем выводить утверждения о зависимости определителя от столбцов столбцах из соответствующего утверждения о строках и наоборот. Мы будем сразу формулировать оба утверждения, помня, что одно из другого автоматически выводится с помощью свойства 1.

Свойство 2. Кососимметричность. Если в матрице поменять местами какие-нибудь две строки (столбца), то определитель изменит знак.

Доказательство. Ясно, что при перестановке строк произведения из (6.4) также переставятся, и нужно только убедиться, что количество инверсий изменится на нечетное число. Проще всего это сделать, используя геометрическую интерпретацию инверсий, т.е. считая число отрезков в направлении SW-NO.

Задача 6.13. *Проведите подробное доказательство.*

Свойство 3. Если в матрице имеются две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю.

Доказательство. Действительно, при перестановке этих строк определитель должен изменить знак, но матрица, и, следовательно, ее определитель, при этом не меняются. $\det A = -\det A$, следовательно $2\det A = 0$. Если двойка не является в нашем кольце делителем нуля или нулем, то все доказано.

Задача 6.14. *Выполняется ли это свойство в общем случае (в частности, над полем характеристики 2)?.*

Свойство 4. Разложение определителя по строке (столбцу).

Зафиксируем k-ую строку матрицы A. Очевидно, в каждое произведение из формулы (6.4) входит ровно один сомножитель из этой строки. Сгруппируем слагаемые в этой формуле, содержащие один и тот же элемент данной строки, и вынесем его за скобки. Сомножитель, получающийся в результате при элементе $a_{k,j}$ называется *алгебраическим дополнением* элемента $a_{k,j}$ и традиционно обозначается $A_{k,j}$ Таким образом, мы представили формулу для вычисления определителя в следующем вида:

$$\det A = a_{k,1}A_{k,1} + a_{k,2}A_{k,2} + \ldots + a_{k,n}A_{k,n}. \tag{6.6}$$

Теперь нужно разобраться, как вычисляются алгебраические дополнения. Очевидно, алгебраическое дополнение $A_{k,j}$ представляет собой сумму произведений элементов матрицы не лежащих на k-ой строке и j-ом столбце, т.е. тех самых произведений, которые стоят в формуле определителя матрицы, полученной из матрицы A выбрасыванием k-ой строки и j-ого столбца. Осталось проверить знаки. Для этого нужно просто посчитать, сколько инверсий (т.е. отрезков в направлении SW-NO) теряется при удалении (вместе с k-ой строкой и j-ом столбцом) элемента $a_{k,j}$. Дополнение к k-ой строке и j-ому столбцу распадается на четыре области, которые мы в соответствии со сторонами света обозначим NO, NW, SW и SO. (Некоторые из этих областей могут оказаться пустыми.) "Лишние" инверсии в каждом произведении образуют с элементом $a_{k,j}$ элементы, лежащие в областях NO и SW. Предположим, что в области NW в данном произведении имеется x сомножителей. Тогда остальные сомножители из первых $k-1$ строки должны лежать в области NO, следовательно, в области NO лежат $k-1-x$ сомножителей. Аналогично, считая сомножители из первых $j-1$ столбцов, найдем, что в области SW должно лежать $j-1-x$ сомножителей. Таким образом, выбрасываемый элемент $a_{k,j}$ участвует в $(k-1-x)+(j-1-x) = k+j-2(x+1)$ "лишних" инверсиях. Поскольку нас интересует только четность числа инверсий, мы в итоге получаем, что знак данного произведения в алгебраическом дополнении и в определителе матрицы, полученной из матрицы A выбрасыванием k-ой строки и j-ого столбца, отличается сомножителем $(-1)^{k+j}$.

В итоге получается

Формула разложения определителя по строке.

$$\det A = a_{k,1}A_{k,1} + a_{k,2}A_{k,2} + \ldots + a_{k,n}A_{k,n}, \tag{6.7}$$

где $A_{k,j}$ — это умноженный на $(-1)^{k+j}$ определитель матрицы, полученной из матрицы A выбрасыванием k-ой строки и j-ого столбца.

Задача 6.15. *Используя свойство 1, вывести формулу разложения определителя по столбцу:*

$$\det A = a_{1,k}A_{1,k} + a_{2,k}A_{2,k} + \ldots + a_{n,k}A_{n,k}. \tag{6.8}$$

Теперь мы легко можем доказать предыдущее свойство в общем случае индукцией по размеру матрицы: если разложить определитель матрицы $n \times n$ с двумя одинаковыми строками по какому-нибудь еще строке, то каждое алгебраическое дополнение будет (с точностью до знака) определителем матрицы на единицу меньшего размера, в которой по-прежнему имеются две одинаковые строки, поэтому по предположению индукции все слагаемые окажутся равными нулю. (Конечно, надо было сначала указать базу индукции — случай $n = 2$, когда явная формула для определителя сразу дает ноль.)

Возвращаясь назад к нашим экспериментам с решением линейных систем в предыдущем разделе, мы видим, что в качестве коэффициентов, на которые мы домножали уравнения, брались как раз алгебраические дополнения к коэффициентам при том неизвестном, которое одно только и оставалось после сложения уравнений. Естественно, что коэффициентом при этом неизвестном согласно формуле разложения по столбцу (6.8) оказывался как раз определитель. Но почему при этом обнулялись коэффициенты при остальных неизвестных? Это довольно неожиданное свойство называется обычно "леммой о фальшивом разложении", поскольку мы вычисляем сумму произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на алгебраические дополнения к элементам *другой* строки (столбца).

Свойство 5. Лемма о фальшивом разложении. При $k \neq m$

$$\begin{array}{c} a_{m,1}A_{k,1} + a_{m,2}A_{k,2} + \ldots + a_{m,n}A_{k,n} = 0 \quad \text{(по строке)} \\ a_{1,m}A_{1,k} + a_{2,m}A_{2,k} + \ldots + a_{n,m}A_{n,k} = 0 \quad \text{(по столбцу)} \end{array} \tag{6.9}$$

Доказательство очень простое: первое равенство представляет собой разложение по k-ой строке определителя матрицы, в которой в k-ую строку поставили элементы m-ой строки этой матрицы; по свойству 3 такой определитель равен нулю.

Теперь нам уже совершенно понятно, как решать систему систему n линейных уравнений с n неизвестными (5.13): чтобы получить уравнение, содержащее только неизвестное x_k, надо домножать уравнения на алгебраические дополнения к коэффициентам при x_k (т.е. к элементам k-ого столбца матрицы коэффициентов системы). В результате сложения полученных уравнений коэффициентом при x_k окажется как раз определитель матрицы коэффициентов системы (свойство 4), который в этом случае часто называют *главным определителем системы*, а коэффициенты при остальных неизвестных обратятся в нуль (свойство 5). Также нетрудно записать в виде определителя выражение D_k, стоящее в правой части равенства: это есть разложение по k-ому столбцу определителя матрицы, полученной из матрицы коэффициентов системы заменой k-ого столбца на столбец правых частей системы (5.13). Тем самым мы доказали, что система уравнений (5.14) является следствием системы (5.13).

Но являются ли эти системы равносильными, т.е можно ли из системы (5.14) вывести начальную систему (5.13)? Для ответа на этот вопрос сложим уравнения (5.13), домноженные, соответственно, на $a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}$. В левой части, очевидно, получится умноженная на D левая часть k-ого уравнения системы (5.13). В выражении в правой части надо для каждого j сгруппировать слагаемые, содержащие b_j; нетрудно заметить, что для $j = k$ коэффициентом при b_k окажется в точности разложение определителя матрицы A по k-ой строке, а при $j \neq k$ коэффициентом при b_j получится соответствующее "фальшивое разложение", равное по свойству 5 нулю. Тем самым мы получили k-ое уравнение нашей начальной системы (5.13), но только домноженное на D.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 6.1. *(Теорема Крамера, предварительная форма.) 1) Систему n линейных уравнений с n неизвестными над кольцом R*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases} \tag{6.10}$$

можно домножением уравнений на константы и сложением уравнений привести к к виду

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1 \\ Dx_2 = D_2 \\ \dots \\ Dx_n = D_n, \end{cases} \tag{6.11}$$

где D — это определитель матрицы коэффициентов системы (т.е. главный определитель системы), а D_k — это определитель матрицы, полученной из матрицы коэффициентов системы заменой k-ого столбца на столбец свободных членов системы.
2) Если D не является делителем нуля в кольце R, то системы (6.10) и (6.11) равносильны.
3) Если D обратим в кольце R, то система (6.10) имеет единственное решение

$$\begin{cases} x_1 = D_1/D \\ x_2 = D_2/D \\ \dots \\ x_n = D_n/D. \end{cases} \tag{6.12}$$

Для того, чтобы получить из предварительной формы теоремы Крамера окончательную, надо разобраться, что происходит при "плохих" значениях определителя D; мы сделаем это только для случая, когда основное кольцо является полем.

Теорема 6.2. *(Теорема Крамера, окончательная форма.) 1) Если определитель матрицы коэффициентов системы n линейных уравнений с n неизвестными над полем $\mathbb{K}$ (6.10) отличен от нуля, то система имеет единственное решение, задаваемое формулами Крамера (6.12)*
2) Если определитель матрицы коэффициентов системы (6.10) равен нулю, то система либо не имеет решений, либо решение не единственно (бесконечно много решений в случае бесконечного основного поля).

Первую часть этой теоремы мы уже доказали, а вот вот доказательство второй части требует принципиально других идей, поэтому мы отложим его до следующего раздела.

Отметим, однако, сразу же одно полезное следствие второй части теоремы Крамера, относящееся к однородным системам. Система линейных уравнений (6.10) называется однородной, если все ее правые части равны нулю, т.е. $b_i = 0\ \forall i$. В этом случае система гарантировано имеет одно решение нулевое, т.е. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Поэтому первая часть теоремы Крамера в этом случае говорит, что если главный определитель отличен от нуля, то это нулевое решение единственно, а если главный определитель равен нулю, то согласно второй части обязательно имеются ненулевые решения. (Этот случай, как правило, и представляет интерес.)

Следствие 6.1. *Однородная система n уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее главный определитель равен нулю.*

7. Определители: вычисление.

Свойство 6. Определитель есть линейная функция любой своей строки (столбца).

Это важнейшее свойство сразу следует из формулы (6.7) (или, соответственно, (6.8)): поскольку алгебраические дополнения не зависят от элементов данной строки (столбца), это выражение действительно задает линейную функцию от элементов $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots a_{k,n}$ (или, соответственно, $a_{1,k}, a_{2,k}, \ldots a_{n,k}$).

Замечание. Мы не дали здесь формального определения линейной функции, подразумевая следующее наивное определение:

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется линейной, если ее можно записать в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n, \tag{7.1}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ некоторые константы.

Определение, использующее явную формулу для функции, не всегда удобно, поэтому более употребительным является другое, более инвариантное определение. В этом определении удобно использовать векторные обозначения: будем обозначать вектор-строку $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ одним символом (скажем, v). Напомним, что мы умеем складывать матрицы (и, в частности, вектор-строчки) и умножать их на числа.

Функция $f(v)$, где $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется линейной, если для любых двух вектор-строк u и v и любой константы λ

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$;

2) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Задача 7.1. *Доказать равносильность этих двух определений.*

Задача 7.2. *Доказать, что функция от одного переменного $f(x) = x^p$ над полем $\mathbb{F}_p$ является линейной. Как ее записать в виде (7.1)?*

Свойство линейности определителя настолько важно и настолько часто используется, что мы переформулируем это свойство на языке второго определения.

1) Если все элементы какой-нибудь строки (столбца) матрицы умножить на одно и то же число, то определитель тоже умножится на это число.

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \ldots & a_{k-1,n} \\ \lambda a_{k,1} & \lambda a_{k,2} & \ldots & \lambda a_{k,n} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \ldots & a_{k-1,n} \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \ldots & a_{k,n} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad (7.2)$$

2) Если все элементы k-ой строки (столбца) матрицы A представлены в виде суммы двух слагаемых (т.е. $a_{k,j} = \alpha'_j + \alpha''_j$), то определитель этой матрицы равен сумме определителей двух матриц A' и A'' в k-ой строке (столбце) которых стоят, соответственно, первые (α'_j) и вторые (α''_j) слагаемые k-ой строки (столбца) исходной матрицы, а остальные строки (столбцы) — такие же, как в матрице A.

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \ldots & a_{k-1,n} \\ \alpha'_1 + \alpha''_1 & \alpha'_2 + \alpha''_2 & \ldots & \alpha'_n + \alpha''_n \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \ldots & a_{k-1,n} \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \ldots & \alpha'_n \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \ldots & a_{k-1,n} \\ \alpha''_1 & \alpha''_2 & \ldots & \alpha''_n \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad (7.3)$$

Доказательство в обоих случаях одно и то же: надо просто разложить определитель по k-ой строке.

Свойство 7. Определитель матрицы не изменится, если к какой-нибудь строке (столбцу) этой матрицы прибавить другую ее строку (столбец), умноженный на любое число.

Доказательство этого важного свойства совсем простое: если мы к k-ой строке (столбцу) матрицы A прибавляем умноженную на λ j-ую строку этой же матрицы, то согласно свойству линейности полученный определитель равен сумме определителей двух матриц, первая из которых совпадает с матрицей A, а вторая получена из матрицы A заменой ее k-ой строки на j-ую. Но тем самым у второй матрицы две одинаковые строки, поэтому ее определитель равен нулю, что и завершает доказательство.

Это свойство позволяет изменять матрицу A, не меняя ее определителя; описанное здесь преобразование матрицы называется ее *элементарным преобразованием*. Целенаправленное применение элементарных преобразований позволяет изменять матрицу таким образом, чтобы в конце концов получилась верхнетреугольная матрица, определитель которой, как следует из задачи 6.6, равен просто произведению ее диагональных элементов. Это наиболее экономный способ вычисления определителя; он называется *алгоритмом Гаусса*. Для алгоритма Гаусса нам, правда, потребуется добавить к списку элементарных преобразований еще одну операцию, которую мы уже обсуждали: это перестановка двух строк (или столбцов) матрицы. Определитель при этом, конечно, меняется, но легко контролируемым образом: он просто меняет знак.

Итак, мы рассматриваем элементарные преобразования двух типов:

- прибавление к одной строке (столбцу) матрицы другой ее строки (столбца), умноженной на некоторое число;

- перестановка двух строк (или столбцов).

Теорема 7.1. *Любую квадратную матрицу над полем $\mathbb{K}$ элементарными преобразованиями только над строками (или только над столбцами) можно привести к верхнетреугольному виду.*

Доказательство будем вести индукцией по размеру матрицы; очевидно, что любая матрица 1×1 уже верхнетреугольная. Рассмотрим теперь некоторую матрицу A размером $n \times n$; по предположению индукции наше утверждение доказано для всех матриц меньшего размера. Возможны два варианта: либо первый столбец матрицы A состоит только из нулей, либо же в нем имеется хоть одно ненулевое число. Во втором случае надо перестановкой строк добиться того, чтобы a_{11} оказалось ненулевым, а затем, домножая первую строку на подходящие коэффициенты и вычитая ее из всех остальных строк, сделать нулевыми все элементы первого столбца, кроме a_{11}. (Для того, чтобы "убить" a_{k1}, надо, конечно, вычесть из k-ой строки первую, домноженную на a_{k1}/a_{11}.) В результате в обоих вариантах у нас получается матрица, в которой все элементы первого столбца, кроме, быть может, первого, равны нулю. Для завершения доказательства нам остается лишь применить предположение индукции к матрице, образованной всеми строками нашей матрицы, кроме первой, и всеми столбцами нашей матрицы, кроме первого; эти элементарные преобразования, конечно, не изменят нулевых элементов первого столбца.

Алгоритм, индуктивно описанный выше, называется алгоритмом Гаусса; различные модификации этого алгоритма применяются во многих других задачах линейной алгебры. Отметим, что этот алгоритм является наиболее экономным алгоритмом для практического вычисления определителя произвольной матрицы; именно он обычно реализуется в компьютерных вычислениях. (Для матриц заранее известного специального вида, придумываются, конечно, отдельные, более быстрые алгоритмы.)

Отметим, что алгоритм Гаусса можно применять не только к квадратным матрицам, причем в для многих приложений (в частности, к системам линейных уравнений) удобно уточнить понятие верхнетреугольной матрицы следующим образом. Матрица $A = (a_{ij})$ размером $m \times n$ называется *верхнеступенчатой*, если существует такое $r \le m$ и такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел $j_1 < j_2 \ldots < j_r \le n$, что при $k \le r$ $a_{kj} = 0$ при $j < j_k$, но $a_{kj_k} \neq 0$, а при

$k > r$ $a_{kj} = 0$ $\forall j$. Таким образом, ненулевые элементы могут стоять в верхнеступенчатой матрице только в правом верхнем углу, в области, ограниченной "лесенкой", состоящей из r ступенек высоты 1, причем в углу каждой ступеньки стоит ненулевое число. Очевидно, любая верхнетреугольная матрица является верхнеступенчатой. Следующая теорема доказывается ровно так же, как предыдущая.

Теорема 7.2. *Любую матрицу над полем $\mathbb{K}$ элементарными преобразованиями только над строками (или только над столбцами) можно привести к верхнеступенчатому виду.*

Предположим, что мы привели к верхнеступенчатому виду квадратную матрицу $n \times n$, определитель которой мы хотим посчитать. Очевидно, что ее определитель будет ненулевым тогда и только тогда, когда все числа, стоящие на главной диагонали верхнеступенчатой матрицы будут ненулевыми, т.е. когда $r = n$ и $j_k = k$ $\forall k$. А, наоборот, нулевым он может оказаться только в том случае, когда в последовательности номеров ступенек хотя бы в одном месте окажется, что $j_k > k$, а поскольку наша матрица квадратная, это означает, что число ступенек будет меньше n, т.е. в верхнеступенчатой матрице будет хоть одна нулевая строка. Напомним, что в методе Гаусса мы всегда прибавляем к какой-то строке (с некоторым сомножителем) другую строку, которая стоит выше ее, поэтому нулевая строка получилась в результате прибавления к некоторой строке нашей начальной матрицы линейной комбинации других ее строк, которые стояли выше ее. Это значит, что эта строка является некоторой линейной комбинацией некоторых других строк этой же матрицы. Тем самым мы получили критерий равенства определителя нулю.

Теорема 7.3. Необходимое и достаточное условие равенства определителя нулю. *Определитель матрицы (с элементами из поля $\mathbb{K}$) равен нулю тогда и только тогда, когда одна из его строк (столбцов) является линейной комбинацией других ее строк (столбцов).*

Строго говоря, мы доказали только необходимость этого условия, однако достаточность очевидна: если одна строка является линейной комбинацией остальных, то вычитая из нее остальные строки с соответствующими коэффициентами, мы в результате получим матрицу с нулевой строкой, определитель которой заведомо равен нулю.

8. Линейные системы - 2.

Следующее приложение теоремы 7.2 связано с решением линейных систем.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right. \tag{8.1}$$

С этой системой естественно связать две матрицы. Во-первых, это матрица A размером $m \times n$, элементами которой будут все коэффициенты a_{ij} нашей системы. (Именно определитель матрицы A фигурирует в теореме Крамера в случае $m = n$.) Однако полная информация о системе содержится в так называемой *расширенной матрице системы* $\overline{A}$, полученной добавлением к матрице A n+1-ого столбца, в котором стоят правые части уравнений b_j. Очевидно, что элементарные преобразования над строками расширенной матрицы $\overline{A}$ соответствуют равносильным преобразованиям системы (8.1), то есть перестановкам уравнений и прибавлению к одному из уравнений другого, умноженного на некоторое число[2]. Следовательно, теорема 7.2 означает, что любая система линейных уравнений равносильна системе, расширенная матрица которой имеет верхнеступенчатый вид.

[2]Равносильность такого рода преобразований следует из того, что в результате получается система, являющаяся, очевидно, следствием исходной, что, ввиду обратимости элементарных преобразований дает равносильность.

Следствие 8.1. *Любая система линейных уравнений может быть элементарными преобразованиями приведена к равносильной системе, расширенная матрица которой имеет верхнеступенчатый вид.*

А для такой системы описать ее решения очень просто. Предположим, что расширенная матрица системы (8.1) является верхнеступенчатой, т.е. для некоторого $r \le m$ имеется строго возрастающая последовательность натуральных чисел $j_1 < j_2 \ldots < j_r \le n+1$, что при $k \le r$ $a_{kj} = 0$ при $j < j_k$, но $a_{kj_k} \ne 0$, а при $k > r$ $a_{kj} = 0$ $\forall j$.

Во-первых, заметим, что если последняя, r-ая ступенька имеет длину 1 (т.е. $j_r = n+1$), то это означает, что в последнем уравнении коэффициенты при всех неизвестных равны нулю, а правая часть отлична от нуля, так что такая система заведомо не имеет решений. Сейчас мы увидим, что в остальных случаях, (т.е. при $j_r < n+1$) система имеет решения, которые к тому же очень легко описать. Действительно, в этом случае "углы" всех ступенек находятся в матрице A, т.е. $j_1, j_2, \ldots, j_r$ номера каких-то неизвестных. Назовем неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ *связанными неизвестными*, а остальные неизвестные назовем *свободными*. Эта терминология оправдывается тем, что если мы перенесем все слагаемые со свободными неизвестными в правую часть и придадим этим неизвестным *любые* значения, то связанные неизвестные определятся согласно теореме Крамера 6.2 (точнее, уже доказанной ее первой части) однозначно, потому что относительно связанных неизвестных у нас получится система r уравнений с r неизвестными $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$, главный определитель которой имеет верхнетреугольный вид с ненулевыми элементами (a_{kj_k}) на главной диагонали. Наконец, легко выделить случай, когда система имеет единственное решение: для этого необходимо и достаточно, чтобы свободных неизвестных не было вовсе, т.е. требуется, чтобы число ступенек совпадало с числом неизвестных ($r = n$), и все ступеньки (кроме последней) имели длину 1, т.е. последовательность $j_1, j_2, \ldots, j_r$ совпала с $1, 2, \ldots, n$.

Подведем итоги.

Предложение 8.1. *Пусть расширенная матрица $\overline{A}$ системы (8.1) является верхнеступенчатой, т.е. для некоторого $r \le m$ имеется строго возрастающая последовательность натуральных чисел $j_1 < j_2 \ldots < j_r \le n+1$, что при $k \le r$ $a_{kj} = 0$ при $j < j_k$, но $a_{kj_k} \ne 0$, а при $k > r$ $a_{kj} = 0$ $\forall j$. Тогда*
1) Система имеет решения тогда и только тогда, когда r-ая строка матрицы $\overline{A}$ содержит более одного ненулевого элемента, т.е. когда $j_r < n+1$.
2) Если система имеет решение, то она имеет однозначное решение при любых значениях свободных неизвестных (т.е. всех неизвестных, кроме $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$).
3) Система имеет единственное решение только в случае, когда $r = n$ и $j_k = k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

В качестве следствия немедленно получаем доказательство до сих пор не доказанной второй части теоремы Крамера 6.2: мы видим, что согласно части 3 предложения 8.1 существование и единственность решения системы с верхнеступенчатой расширенной матрицей $\overline{A}$ в точности равносильно (для системы $n \times n$) условию $\det A \ne 0$, а любая система согласно следствию 8.1 может быть приведена к равносильной ей верхнеступенчатой элементарными преобразованиями, не меняющими (с точностью до знака) ее определителя.

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что вид и структура решений исходной системы оказались существенно зависящими от некоторого натурального числа r — количества ненулевых строк в верхнеступенчатой матрице, полученной из расширенной матрицы системы $\overline{A}$ элементарными преобразованиями (методом Гаусса). Но метод Гаусса можно осуществлять множеством различных способов (напомним, на каждом шаге мы выбирали *произвольную* строчку с ненулевым элементом в первом столбце и затем при помощи этой строчки обнуляли первые элементы во всех остальных строках). Поэтому естественно предположить, что это число r на самом деле не зависит от того, какую именно последовательность элементарных преобразований мы применили для приведения матрицы к верхнеступенчатому виду, а является инвариантом самой матрицы. Это, действительно, так и есть, это число r называется *рангом* матрицы, однако давать точное определение и изучать различные свойства ранга удобнее в более общем контексте, который обсуждается в следующем разделе.

9. Линейные пространства. Ранг и размерность.

Нам встречалось несколько различных ситуаций, когда мы работали с определенным типом математических объектов, которых можно было складывать и умножать на числа (скажем, действительные). Первый пример такого рода — это множество геометрических векторов плоскости. Следующий пример — геометрические векторы в трехмерном пространстве. Для произвольного поля $\mathbb{K}$ можно рассмотреть множество матриц фиксированного размера с элементами из этого поля — в разделе 4 объяснялось, как складывать матрицы и как умножать их на числа. Отметим наиболее часто встречающийся случай, когда используют матрицы, имеющие только одну строку (вектор-строчки) или только один столбец (вектор-столбцы); именно с этой ситуацией мы работали, когда проделывали элементарные преобразования над строками (столбцами) некоторой матрицы. Имеется еще один хорошо известный ряд примеров над полем $\mathbb{R}$ — это вещественные функции, определенные на некотором фиксированном подмножестве действительной прямой. При этом можно рассматривать не все функции, а только те, которые удовлетворяют какому-нибудь фиксированному свойству, сохраняющемуся при сложении двух функций и при умножении функции на любое число. Так, можно, например, рассматривать только ограниченные функции, или только непрерывные функции, или только дифференцируемые, или только многочлены.

Для того, чтобы рассматривать все эти примеры в едином контексте, вводится понятие *линейного пространства.*

Определение 9.1. *Линейным пространством над полем* $\mathbb{K}$ *называется*

Неформально говоря, линейным пространством над полем $\mathbb{K}$ называется множество объектов, которые можно складывать и умножать на числа (т.е. элементы поля $\mathbb{K}$) таким образом, что выполняются все привычные свойства сложения и умножения на число.

...