

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ГУ-ВШЭ
ПИСЬМЕННЫЙ ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН В АСПИРАНТУРУ

12 октября 2010 г.

(продолжительность экзамена 5 часов)

1. Группа G всех целочисленных векторов на плоскости относительно сложения содержит подгруппу H , состоящую из векторов с четными координатами, сумма которых делится на 3. Найдите разложение факторгруппы G/H в прямую сумму циклических групп.
2. Перечислите все группы порядка 35 с точностью до изоморфизма.
3. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем из q элементов. Сколько существует пар векторных подпространств (ℓ, Π) , где $\ell \subset \Pi \subset V$, и $\dim \ell = 1$, $\dim \Pi = n - 1$?
4. Функция $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ставит в соответствие точке в \mathbb{R}^n ее предмаксимальную по величине координату. Пусть I — единичный куб в \mathbb{R}^n (множество точек, все координаты которых заключены между нулем и единицей). Найдите интеграл функции φ по I .
5. Пусть $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Существует ли голоморфное отображение $f: U \rightarrow U$, для которого $f(0) = 1/3$ и $f(1/3) = 3/4$?
6. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$X^3 + X^2Z - Y^2Z = 0.$$

7. Существует ли такое компактное метрическое пространство X , состоящее из более чем одной точки, что X гомеоморфно $X \times X$?