

Алгебра. Листок 5.

- ◇ **5.1.** Докажите, что вырожденная 2×2 матрица либо нильпотентна, либо пропорциональна идемпотентной матрице.
- ◇ **5.2.** Докажите, что если 2×2 матрица A нильпотентна, то $A^2 = 0$.
- ◇ **5.3.** Найдите все вещественные 2×2 матрицы A , удовлетворяющие каждому из следующих условий: а) нильпотентные; б) идемпотентные; в) $A^2 = E$; г) $A^2 = -E$.
- ◇ **5.4.** Докажите, что квадрат матрицы ранга 1 пропорционален ей самой.
- ◇ **5.5.** Вычислите A^m ($m \in \mathbb{N}$) и A^{-1} (если только обратная существует) для следующих матриц (если размер не указан, считать, что $n \times n$):
- а) $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } j = i + 1 \\ 0 & \text{если } j \neq i + 1 \end{cases}$ б) $a_{i,j} = \begin{cases} x & \text{если } j = i \\ 1 & \text{если } j = i + 1 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ в) $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$
- г) $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$ д) $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } j \geq i \\ 0 & \text{если } j < i \end{cases}$ е) $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } j - i \equiv 1 \pmod{n} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
- ж) $\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; з) $a_{i,j} = \begin{cases} \frac{x^{j-i}}{(j-i)!} & \text{если } j \geq i \\ 0 & \text{если } j < i \end{cases}$.
- ◇ **5.6.** Матрицы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$. Перечислите все матрицы, перестановочные с матрицей A в следующих случаях:
- а) A — диагональная матрица, причем все $a_{i,i}$ различны. б) A — из 5.5а; в) A — из 5.5в;
- г) A — из 5.5е; д) A — из 5.5ж, причем x, y, z все различные и ненулевые. е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ◇ **5.7.** Докажите, что следующие множества матриц являются кольцами. Про каждое из них выясните, коммутативно ли оно, является ли оно полем, можно ли его представить в виде прямого произведения колец, содержит ли оно нильпотентные элементы (перечислите!).
- 1) Все верхнетреугольные $n \times n$ матрицы; 2) Все диагональные $n \times n$ матрицы;
- 3)-8) Каждое из множеств а)-е) из предыдущей задачи.
- ◇ **5.8.** Докажите, что любая 2×2 матрица A удовлетворяет соотношению вида $A^2 + \lambda A + \mu E = 0$. (E — единичная матрица, а 0 — нулевая.) Выразите λ и μ через коэффициенты матрицы A .
- ◇ **5.9.** Пусть N — нильпотентная матрица. Докажите, что матрица $E + N$ обратима.
- ◇ **5.10.** Докажите, что а) $\text{tr } AB = \text{tr } BA$; б) если C обратима, то $\text{tr } CAC^{-1} = \text{tr } A$.
- ◇ **5.11.** Пусть A — 2×2 матрица. Докажите формулу для вычисления обратной матрицы: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} [(\text{tr } A)E - A]$.
- ◇ **5.12.** Пусть \mathbb{K} — некоторое поле. Докажите, что множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{K}$ является коммутативным кольцом с единицей. Докажите, что это кольцо нельзя представить в виде прямого произведения колец. Перечислите все его делители нуля и нильпотентные элементы. Докажите, что в случае $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ это кольцо не изоморфно никакому кольцу \mathbb{Z}_n .
- ◇ **5.13.** а) Пусть \mathbb{K} — некоторое поле, A — 2×2 матрица над \mathbb{K} . Докажите, что множество матриц вида $xE + yA$, $x, y \in \mathbb{K}$ является коммутативным кольцом с единицей. Докажите, что это кольцо изоморфно либо прямому произведению $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$, либо кольцу из предыдущей задачи, либо является полем.
- б) Покажите, что все три указанных в пункте "а" варианта реализуются в случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- в) Покажите, что все три указанных в пункте "а" варианта реализуются в случае $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.
- г) Покажите, что все три указанных в пункте "а" варианта реализуются в случае $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$.
- д) Покажите, что если в случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ получилось поле, то оно изоморфно полю \mathbb{C} .