Листок 1

Задачи 1 – 6 составляют домашнее задание к 12 ноября и должны быть сданы к этому сроку

1. С помощью изоклин постройте эскизы графиков решений следующих уравнений. Выделите области возрастания и убывания решений.
   (1) $yy' = 4(x-1)$;
   (2) $y' = \sin(x+y)$

2. Составьте дифференциальное уравнение
   (1) семейства линий $x^2 + Cy^2 = 1$;
   (2) семейства окружностей радиуса 1, центры которых лежат на прямой $y = 2x$.

3. Решите следующие уравнения с разделяющимися переменными.
   (1) $y' = y^2 - 3y + 2$;
   (2) уравнения из задачи 1.

4. Найдите частное решение уравнения

$$y' \operatorname{ctg} x + y = 2,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = -1$

5. Напишите уравнение точек максимума или минимума всевозможных решений уравнения $y' = f(x,y)$. Как отличить точки максимума от точек минимума? Напишите также уравнение точек перегиба всевозможных решений уравнения $y' = f(x,y)$. Проиллюстрируйте на примере уравнения $y' = y - x^2$.

6. Пуля входит в доску толщиной 10 см со скоростью 200 км/ч и вылетает, пробив ее, со скоростью 50 км/ч. Каково время движения пули сквозь доску, если сопротивление доски движению пули пропорционально
   (1) ее скорости;
   (2) квадрату ее скорости?

7.* Составьте дифференциальное уравнение:
   (1) семейства софокусных эллипсов с фокусами в точках $(\pm c, 0)$.
   (2) семейства парабол, проходящих через точки $(0,0)$, $(1,1)$ и (-1,1).
   (3) семейства циклоид $x + C = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ (C – параметр).

Какие кривые, не входящие в данное семейство, удовлетворяют вашему дифференциальному уравнению?

8.* Источник света помещен в точку $(0,0)$. Какова должна быть форма зеркала, чтобы все отраженные лучи
   (1) были параллельны оси Ox;
   (2) проходили через точку $(1,0)$?

9.* Докажите, что каждая интегральная кривая уравнения $y' = \sqrt[3]{\frac{y^2+1}{x^4+1}}$ имеет две горизонтальные асимптоты.

10.* Докажите, что семейство всех парабол на плоскости (кривых второго порядка, являющихся параболами) описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка $5y''' - 3y''y^{IV} = 0$.