Конечные группы

Названия и обозначения. Группа биективных отображений $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}$, индуцированных ограничениями на фигуру $\mathfrak{F}$ всевозможных движений пространства, переводящих фигуру $\mathfrak{F}$ в себя, называется *собственной* или *несобственной* группой фигуры $\mathfrak{F}$, смотря по тому, допускаются ли несобственные (меняющие ориентацию) движения. Группа правильного плоского n-угольника в евклидовом $\mathbb{R}^3$ называется *группой диэдра* и обозначается $\mathfrak{D}_n$. Группу $\mathfrak{D}_2$ двуугольника $\circ$ иногда называют *четвертной группой Клейна* и обозначают $\mathfrak{V}_4$. Через $\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{S}_n$ мы обозначаем знакопеременную и симметрическую группы.

А5◇1. Каким бывает в (неабелевой) группе порядок элемента ba, если порядок ab равен n ?

А5◇2. Найдите порядок группы с образующими a, b и соотношениями $ab^2 = ba$, $ba^2 = ab$.

А5◇3. Всякая ли конечная группа, порождённая двумя инволюциями, изоморфна диэдральной?

А5◇4. Обязательно ли нормальна подгруппа, произведение любых двух левых смежных классов которой также представляет собой левый смежный класс?

А5◇5. Две нормальные подгруппы пересекаются по единице. Обязательно ли их элементы перестановочны?

А5◇6. Покажите, что классы сопряжённости в группе перестановок $\mathfrak{S}_n$ нумеруются диаграммами Юнга, и выразите число элементов класса через числа $(m_1, m_2, \dots, m_n)$, где m_i есть количество строк длины i в соответствующей диаграмме.

А5◇7. Сколько элементов $\mathfrak{S}_5$ неподвижно при сопряжении перестановкой $(3, 5, 1, 2, 4)$?

А5◇8. Перечислите классы сопряжённых элементов с указанием числа элементов в каждом классе для знакопеременных групп **а)** $\mathfrak{A}_3$ **б)** $\mathfrak{A}_4$ **в)** $\mathfrak{A}_5$ **г)** $\mathfrak{A}_6$

А5◇9. Изоморфны ли: **а)** $\mathfrak{S}_3$ и $\mathfrak{D}_3$? **б)** $\mathfrak{S}_4$ и несобственная группа тетраэдра?

А5◇10. Найдите порядок стабилизатора вершины и порядок всей группы для собственных и несобственных групп пяти платоновых тел в $\mathbb{R}^3$.

А5◇11. Постройте геометрические изоморфизмы собственных групп:
а) тетраэдра с $\mathfrak{A}_4$; **б)** куба и октаэдра с $\mathfrak{S}_4$; **в)** икосаэдра и додекаэдра с $\mathfrak{A}_5$.

А5◇12. Изоморфна ли несобственная группа икосаэдра группе $\mathfrak{S}_5$?

А5◇13. Постройте эпиморфизм $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ и опишите его ядро.

А5◇14. Симметрическая группа $\mathfrak{S}_n$ стандартно действует на $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Опишите орбиты диагонального действия $\mathfrak{S}_n$ на **а)** X^2 **б)** X^3 (для $n \geqslant 3$) **в)** X^m (для $n \geqslant m$)

А5◇15. Собственная группа куба $\mathfrak{S}_4$ действует на множествах V (вершин) и E (рёбер) куба. Опишите орбиты диагонального действия $\mathfrak{S}_4$ на **а)** $V \times V$ **б)** $V \times E$ **в)** $E \times E \times E$

А5◇16. Найдите группы автоморфизмов полей **а)** $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ **б)** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ **в)** $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$
г) $\mathbb{Q}(1+i)$ **д)** $\mathbb{F}_p$ (p простое) **е)** $\mathbb{F}_4$ **ж)** $\mathbb{F}_8$ **з)** $\mathbb{F}_{27}$ **и)** $\mathbb{F}_{16}$ **к*)** $\mathbb{F}_q$ ($q = p^n$, p простое)

А5◇17*. Всякая ли конечная мультипликативная подгруппа поля — циклическая?

А5◇18. Проверьте, что отображение $\mathrm{Ad} : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$, сопоставляющее всякому $g \in \mathfrak{G}$ внутренний автоморфизм $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{G} \xrightarrow{h \mapsto ghg^{-1}} \mathfrak{G}$, есть гомоморфизм. Нормальна ли подгруппа $\mathrm{Ad}(\mathfrak{G}) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$? Опишите центр $Z(\mathfrak{G})$ и группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ и $\mathrm{Ad}(\mathfrak{G})$ для таких групп $\mathfrak{G}$:
а) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ для $n \leqslant 6$ **б)** $\mathfrak{D}_n$ для $n \leqslant 6$ **в)** $\mathfrak{S}_4$ **г)** $\mathfrak{A}_4$ **д)** $\mathfrak{A}_5$

А5◇19. Найдите группы автоморфизмов групп **а)** $\mathfrak{S}_3$ **б)** $\mathfrak{D}_4$ **в)** $\mathfrak{D}_5$ **г)** $\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$

А5◇20*. Постройте невнутренний автоморфизм симметрической группы $\mathfrak{S}_6$.

А5◇21. Сравните число подгрупп, сопряженных данной подгруппе $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$, с индексом её *нормализатора* $N(\mathfrak{H}) = \{g \in \mathfrak{G} \mid g\mathfrak{H}g^{-1} = \mathfrak{H}\}$ и покажите, что любая подгруппа, индекс которой равен наименьшему простому числу, делящему порядок группы (например, двум), нормальна.

А5◇22. Опишите все неизоморфные полупрямые произведения $\mathbb{Z}/(2) \rtimes \mathbb{Z}/(4)$ и $\mathbb{Z}/(4) \rtimes \mathbb{Z}/(2)$.

А5◇23. Опишите все группы порядка **а)** 10 **б)** 6 **в)** 15 **г)** 4 **д)** 9 **е)** 8 **ж)** 12