Математический анализ — II

Листок 7

Последний срок сдачи задач: 16 ноября 2010 года.

1) Пусть измеримая простая функция f представлена двумя способами в виде счетной линейной комбинации характеристических функций дизъюнктных множеств:
$$f(x) = \sum_k c_k \chi_{A_k}(x) = \sum_m d_m \chi_{B_m}(x).$$
Докажите, что $\sum\limits_k c_k \mu(A_k) = \sum\limits_m d_m \mu(B_m)$ в случае, если один из этих рядов абсолютно сходится.

2) Пусть X — пространство с мерой μ, причем $\mu(X) < \infty$. Докажите, что измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}$ суммируема тогда и только тогда, когда сходится ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant n\}.$$

3) Пусть X — пространство с мерой μ ($\mu(X)$ может быть бесконечна). Докажите, что измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}$ суммируема тогда и только тогда, когда сходится ряд
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu\{x \in X \mid |f(x)| \geqslant 2^n\}.$$

4) При каких значениях параметров α и β функция $f(x) = x^\alpha \sin x^\beta$ на луче $(0, +\infty)$
   а) суммируема?
   б) несобственно интегрируема?

5) Пусть f — неотрицательная измеримая функция.
   а) Докажите, что она суммируема на множестве A тогда и только тогда, когда для всех неотрицательных простых функций g, не превосходящих f, интегралы $\int\limits_A g(x)d\mu$ ограничены сверху одной и той же константой.
   б) Докажите, что в предыдущем пункте достаточно рассматривать только функции g, принимающие лишь *конечное* число различных значений.

6) Для любой вещественной функции f положим $f_+(x) = (|f(x)| + f(x))/2$, $f_-(x) = (|f(x)| - f(x))/2$. Докажите, что функция f суммируема тогда и только тогда, когда суммируемы функции f_+ и f_-.

7) Докажите, что измеримая неотрицательная функция f суммируема тогда и только тогда, когда $\sup\limits_A \int\limits_A f(x)d\mu < \infty$, где верхняя грань берется по всем множествам A конечной меры, на которых функция f ограничена сверху.

8) Измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^n(x))$ называется суммируемой, если суммируемы все ее компоненты f^k. Докажите, что функция f суммируема тогда и только тогда, когда суммируема функция $|f|$.

9) Пусть измеримая функция f на множестве X ограничена, и пусть существуют такие константы $c > 0$ и $\alpha < 1$, что $\mu\{x \in X \mid |f(x)| > \varepsilon\} < c/\varepsilon^\alpha$ для любого $\varepsilon > 0$. Докажите, что функция f суммируема на X.

10) Пусть на множестве X конечной меры задана измеримая функция f. Предположим, что существуют такие константы $c > 0$ и $\alpha > 1$, что $\mu\{x \in X \mid |f(x)| > m\} < c/m^\alpha$ для любого $m > 0$. Докажите, что функция f суммируема на X.