

**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ — ВЫСШАЯ ШКОЛА
ЭКОНОМИКИ
факультет математики**

Математический анализ. 2-й курс. Зачет 25 октября 2010 г.

ВАРИАНТ 1

- 1) Докажите, что уравнение $x^2 = -1$ имеет корень в кольце целых 5-адических чисел \mathbb{Z}_5 . Сколько корней имеет это уравнение? Найдите их с точностью 5^{-3} (в 5-адической метрике).
- 2) Для любых $a, b \in (0, +\infty)$ положим

$$d(a, b) = |a - b| + \left| \frac{1}{a} \sin \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \sin \frac{1}{b} \right|.$$

Докажите, что функция $d(a, b)$ является метрикой. Будет ли пространство $(0, +\infty)$ с этой метрикой полным? Если нет, опишите его пополнение.

- 3) Функция $f(x)$ равна максимальной цифре в разложении числа x в бесконечную (то есть без хвоста из нулей) десятичную дробь. Докажите, что f измерима. Найдите непрерывную функцию, эквивалентную f .
- 4) Функция $f(x)$ равна 0 в точках канторова множества E и равна n на тех дополнительных к E интервалах, длина которых равна 3^{-n} . Найдите интеграл Лебега от функции $f(x)$ по отрезку $[0, 1]$.
- 5) Докажите суммируемость функций
- а) $f(x) = \ln x$ на $[0, 1]$;
- б) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на \mathbb{R} ;

**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ — ВЫСШАЯ ШКОЛА
ЭКОНОМИКИ
факультет математики**

Математический анализ. 2-й курс. Зачет 25 октября 2010 г.

ВАРИАНТ 2

1) Докажите, что уравнение $x^2 = 2$ имеет корень в кольце целых 7-адических чисел \mathbb{Z}_7 . Сколько корней имеет это уравнение? Найдите их с точностью 7^{-3} (в 7-адической метрике).

2) Для любых $a, b \in (0, +\infty)$ положим

$$d(a, b) = \max \left(\left| (a+1) \cos \frac{1}{a} - (b+1) \cos \frac{1}{b} \right|, \left| (a+1) \sin \frac{1}{a} - (b+1) \sin \frac{1}{b} \right| \right).$$

Докажите, что функция $d(a, b)$ является метрикой. Будет ли пространство $(0, +\infty)$ с этой метрикой полным? Если нет, опишите его пополнение.

3) Функция $f(x)$ равна минимальной цифре в разложении числа x в бесконечную (то есть без хвоста из нулей) десятичную дробь. Докажите, что f измерима. Найдите непрерывную функцию, эквивалентную f .

4) Функция $f(x)$ равна 0 в точках канторова множества E и равна $\frac{1}{n}$ на тех дополнительных к E интервалах, длина которых равна 3^{-n} . Найдите интеграл Лебега от функции $f(x)$ по отрезку $[0, 1]$.

5) Докажите суммируемость функций

а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на $[0, 1]$;

б) $f(x) = e^{-x^2}$ на \mathbb{R} .