Письменный зачёт за первый модуль (вторая попытка)

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой из задач оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оцениваются в ноль баллов вне зависимости от того, правильный он или нет.

Задача 1. Линейный оператор F на конечномерном комплексном векторном пространстве V индуцирует операторы $S^kF : S^kV \longrightarrow S^kV$, действующие на разложимые тензоры по правилу $F(v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_k) = F(v_1) \cdot F(v_2) \cdot \cdots \cdot F(v_k)$. Справедлива ли в $\mathbb{C}[[t]]$ формула

$$\frac{1}{\det(E - tF)} = \sum_{k \geqslant 0} \operatorname{tr}\bigl(S^kF\bigr) \cdot t^k\,?$$

Решение этой задачи в предположении, что F диагонализуем, оценивается в 6 баллов.

Задача 2. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем характеристики нуль. Верно ли, что пространство симметрических тензоров $\operatorname{Sym}^n(V) \subset V^{\otimes n}$ линейно порождается тензорами вида $v^{\otimes n} = v \otimes v \otimes \cdots \otimes v$ со всевозможными $v \in V$? Можно ли выразить через тензоры вида $v^{\otimes 3}$ симметрический кубический тензор $u \otimes w \otimes w + w \otimes u \otimes w + w \otimes w \otimes u$, где $u, w \in V$ — два произвольных линейно независимых вектора? Если да, напишите такое выражение явно, если нет, объясните почему.

Задача 3. Напишите явную формулу для многочлена $S_5(x) \in \mathbb{Q}[x]$ такого, что при всех целых неотрицательных n выполняется равенство $S_5(n) = 0^5 + 1^5 + 2^5 + \cdots + n^5$.

Задача 4. Сумма двух из трёх комплексных корней многочлена $2\,x^3 - x^2 - 7\,x + \lambda$ равна 1. Чему равно λ?

Задача 5. Выразите $\det \begin{pmatrix} x_1^6 & x_2^6 & x_3^6 & x_4^6 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ через элементарные симметрические многочлены и произведение $\prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$.

Задача 6. Из скольких мономов состоит $s_{(2,1,1)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$?